



36-9-13

BIBLIOTECA PROVINCIALE		
Armadio ~~XXX~~	 ~~36-9-13~~	Pacchetto ~~120~~
Num. d'ordine ~~120~~		

NAZIONALE
B. Prov.



VITT. EM. III

1768
NAPOLI

B. Fred.

II

1768

TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.



OUVRAGES DU MÊME AUTEUR,

QUI SE TROUVENT CHEZ M. CORBY, LIBRAIRE, RUE MACON-SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, N° 8.

Traité élémentaire des Machines, 1 vol. in-4°, avec 35 planches in-folio. 4^e édition; Paris, année 1828.

Correspondance sur l'École royale polytechnique, années 1804 - 1815, 3 vol. in-8°, 42 planches.

Programme d'un Cours de Physique, 1 vol. in-8°; Paris, année 1809.

Supplément à la Géométrie descriptive de Monge, contenant, 1^o une Méthode symbolétique pour mesurer les tangentes aux courbes planes et à double courbure; 2^o la Construction géométrique des rayons de courbure et des plans osculateurs des courbes à double courbure; 3^o l'Analyse géométrique de M. John Leslie, traduite de l'anglais; 1 vol. in-4°, 8 planches, impr. de Firmin Didot; Paris, année 1818.

Éléments de Géométrie à trois dimensions, suivis d'un Traité analytique des surfaces du second degré; 1 vol. in-8°, avec 5 planches; Paris, année 1817.

Ce Traité est le premier ouvrage d'Analyse appliquée à la Géométrie, dans lequel on a établi la division des surfaces du second degré en cinq genres, savoir : l'ellipsoïde, les deux hyperboloïdes à une, à deux nappes, et les deux paraboloïdes, elliptique, hyperbolique.

Collection des Épreuves de Géométrie descriptive, à l'usage de l'École royale polytechnique, année 1817; 1 vol. in-folio de 91 feuilles; présenté à l'Académie royale des sciences, en septembre 1818. (Foy. les procès-verbaux de cette Académie des 21 septembre 1818 et 21 septembre 1820.)

Nota. Cette Collection se compose des Épreuves de Géométrie descriptive, de coupe de pierres, de charpentes, d'ombres et de perspective linéaires, faites en commun par MM. Monge et Hachette, en 1794, année de la fondation de l'École Polytechnique. En 1797, M. Hachette fut seul chargé du Cours de Géométrie descriptive, et refit presque en totalité le premier travail graphique, peu différent de celui qui avait été recueilli à l'ancienne école du génie de Mézières, pour servir de type dans la nouvelle école. Les planches qu'il a ajoutées, et dont le tirage s'est fait avant l'année 1816, ont pour titre : *Cours de Géométrie descriptive*, par M. Hachette.

Programme du Cours élémentaire des Machines, fait à l'École polytechnique en 1808, par M. Hachette, et *Essai sur la composition des Machines*, par MM. Lantzi et Betancourt; 1 vol. in-4°, avec 11 planches; Paris, impr. royale, année 1808.

La planche jointe au programme, est le tableau des Machines géométriques ou élémentaires divisées en dix séries; ce mode de division a été proposé par M. Hachette.

Mémoire sur la Théorie du numérotage des fils, et sur les valeurs diverses des numéros employés dans le commerce pour les fils des tissus et des toiles métalliques, pour les cordes des instruments de musique. (*Bulletin de la Société d'Encouragement*, cahier de décembre 1824.)

Description géométrique de la partie d'une charrette qu'on appelle verrou ou oreille. (*Mémoires de la Société royale et centrale d'agriculture*, année 1821.)

611013

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

COMPRENANT

LES APPLICATIONS DE CETTE GÉOMÉTRIE AUX OMBRES,
A LA PERSPECTIVE ET A LA STÉRÉOTOMIE;

AVEC SOIXANTE-NEUF PLANCHES IN-4^o, ET CINQ IN-FOLIO;



PAR M. HACHETTE,

ANCIEN PROFESSEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT DE LA FACULTÉ DES
SCIENCES DE L'ACADÉMIE DE PARIS, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ET CENTRALE D'AGRICULTURE, DE
LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE, DE LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT, MEMBRE CORRESPONDANT DES
ACADÉMIES DE NAPLES, BRUXELLES, ETC.

DEUXIÈME ÉDITION.

REVUE ET AUGMENTÉE.



PARIS,

CORBY, LIBRAIRE ÉDITEUR,

AUX MARCHÉS SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, N. 8.

1828

810:11



PARIS, IMPRIMERIE DE DECOURCHANT,
Rue d'Erfurth, n° 1, près l'Abbaye.

PRÉFACE DE L'ÉDITION PRÉCÉDENTE,

ANNÉE 1822.



LA géométrie descriptive a pour base la méthode des projections ; elle embrasse diverses connaissances , telles que la stéréotomie , la coupe des pierres , la charpente , le tracé des cartes et des cadrans , etc. Les plus anciens monumens d'architecture attestent que la méthode des projections était déjà connue et pratiquée aux époques où ils furent construits ; qu'on fit usage de cette méthode pour représenter sur des feuilles de dessin , la forme des corps , leurs dimensions et leurs positions respectives. L'application plus moderne de la stéréotomie ou de l'art du trait à la construction des voûtes pleines et de diverses formes , paraît n'avoir été inventée et perfectionnée que dans les derniers siècles. Quelques procédés de cet art ont été décrits sur la fin du seizième siècle , dans un traité d'architecture de Philibert de l'Orme , aumônier de Henri II , roi de France. En 1642 , Jousse publia un traité de coupe de pierres , sous le titre de *Secrets de l'architecture*. Il est probable qu'à cette époque , la pratique de l'art du trait n'était connue que d'un petit nombre d'initiés , qui suivaient quelques écoles particulières. En 1649 , François Derand , jésuite , et Desargue , architecte de Lyon , mirent au jour des traités plus étendus de coupe de pierres. Néanmoins les dessins joints à ces ouvrages , qui en auraient fait le mérite principal , étaient fort incorrects. Heureusement , les arts du dessin et de la gravure se sont perfectionnés , et en 1728 , de La Rue a enrichi l'art des constructions d'une collection d'épures de coupe des pierres la plupart fort exactes , et d'ailleurs très-bien gravées.

Ces divers traités laissaient beaucoup à désirer sous le rapport de la clarté et de la méthode : le texte ne contenant que l'indication d'une suite d'opérations graphiques qui variaient pour chaque voûte , et qui ne s'appuyaient sur aucune théorie , la lecture en était difficile et fatigante. Frezier , officier supérieur du génie militaire (né à Chambéry en 1682) , qui joignait à des connaissances théoriques fort

étendues, la pratique de l'art de l'ingénieur, essaya d'expliquer par les principes de la géométrie les diverses combinaisons de lignes et de surfaces qui constituent *la coupe des pierres et celle des bois* : il publia en 1739 un ouvrage qui est encore fort estimé, sous le titre de *Théorie et pratique de la coupe des pierres*, en trois volumes in-4°. Encouragé par le succès de cet ouvrage, il mit au jour, en 1760, des élémens de stéréotomie, à l'usage de l'architecture (2 volumes in-8°).

Vers le même temps, en 1748, sous le ministère de M. d'Argenson, on avait formé à Mézières un établissement pour l'instruction de MM. les élèves du corps royal du génie militaire. C'est aux chefs, aux professeurs de cet établissement, qu'appartient véritablement l'honneur d'avoir amené la science des projections au degré de perfection où elle se trouvait en 1794, époque de la fondation de l'École polytechnique. La question du *défilement* des ouvrages de fortification (*voyez* note VII, page 296), paraît avoir été le motif des recherches qui firent découvrir les vrais élémens de la géométrie descriptive. Chatillon, qui fut le premier commandant de l'École du génie, d'autres officiers du génie, Millet de Mureau en 1749, Dubuat en 1768, Meusnier en 1777, ont successivement traité cette question, dont la solution comprend une grande partie de la géométrie descriptive. Gaspard Monge (*), qu'un heureux hasard avait amené en 1764 de Beaune sa ville natale, à Mézières, prit une part très-active à ces recherches; son génie l'éleva bientôt à des considérations plus abstraites, et la partie rationnelle de la géométrie aux trois dimensions devint l'objet spécial de ses études. En 1784, époque à laquelle il cessa de professer à l'École du génie, il avait publié dix-sept mémoires d'analyse appliquée à la géométrie aux trois dimensions. Trois de ces mémoires sont remarquables par le nombre et la beauté des propositions nouvelles qu'ils renferment. Le premier, de 1771, traite des courbes à double courbure, de leurs rayons de courbure, et de leurs développées. Le second, de 1774, contient la théorie des surfaces développables, et l'application de cette théorie à la solution la plus générale du problème des ombres, dans l'hypothèse d'un corps

(*) Avant Monge, l'École royale du génie avait eu pour examinateur Camus, et pour professeurs les abbés Nollet et Bossut, tous trois membres de l'Académie royale des sciences.

lumineux et d'un corps opaque étendus aux trois dimensions. Un troisième mémoire, de 1781, faisant suite à celui d'Euler, imprimé en 1760, et au mémoire de Meusnier, publié en 1776, renferme la théorie des lignes de courbure des surfaces. Les autres mémoires, relatifs aux surfaces courbes, contiennent les expressions analytiques des divers modes de génération de ces surfaces, et de leurs propriétés principales. Ces considérations générales sur l'étendue aux trois dimensions amenèrent bientôt la comparaison et le rapprochement des méthodes graphiques, que l'on avait jusqu'alors regardées comme très-distinctes, parce qu'on les appliquait de diverses manières à des arts différents, tels que la fortification, le tracé des routes et des canaux, l'appareil des ouvrages en pierres et en bois; et c'est de cette époque que la stéréotomie fut généralisée; ses opérations furent réduites à des combinaisons très-simples de lignes droites, combinaisons qui forment maintenant les préliminaires de la géométrie descriptive. Cette science prit un nouvel essor en 1794, époque à laquelle on établit une *École centrale de travaux publics*, nommée postérieurement *École polytechnique*. Monge, consulté par le gouvernement sur son organisation, proposa pour modèle de cette grande et belle institution, l'École du génie de Mézières (*). Plusieurs personnes qui avaient été ou élèves ou professeurs de cette école furent appelées à Paris, pour enseigner à l'École polytechnique, les unes la géométrie aux trois dimensions, les autres l'application de cette géométrie à l'art de fortifier les places.

(*) Cette école fut dirigée à l'époque de sa formation par de sages et laborieux officiers du génie, MM. Duvernau et Chatillon, qui eurent pour successeurs d'autres officiers du corps non moins recommandables, MM. de Ramsault, le comte de Jaubert, etc.

Un décret du 12 février 1794 transféra l'École du génie de Mézières à Metz; par un autre décret du 11 mars suivant, une commission a été chargée par le gouvernement de préparer l'établissement de l'École centrale des travaux publics Vers le milieu de novembre, même année, on ouvrit l'École préparatoire des chefs de brigade, et le 21 mars 1795, l'École centrale des travaux publics fut mise en activité. (Voyez la *Notice historique*, t. I de la *Correspondance*, p. 325.) Quelques mois après, on échangea son nom en celui d'École polytechnique, en lui conservant sa première destination, de donner aux élèves des services publics civils et militaires, le premier degré d'instruction. En 1803, un décret a rendu l'École de Metz commune aux élèves de l'École polytechnique qui sont admis dans les services militaires de l'artillerie et du génie. En 1821, elle eut pour commandant en chef, M. le baron Berge, lieutenant-général d'artillerie, l'un des vingt-cinq élèves de l'École préparatoire polytechnique, cités dans la note de la p. viii de cette préface.

Le projet d'organisation de cette école portait que les élèves, au nombre de quatre cents, seraient répartis par vingt dans des salles d'étude; que chaque salle serait présidée par un chef choisi entre les élèves; que ce chef répéterait les leçons des divers professeurs. Cette disposition n'aurait pas été praticable pour la géométrie descriptive, qui n'était encore connue que par tradition. Il eût été impossible de trouver parmi les élèves des écoles de Paris, des chefs d'étude capables d'expliquer la géométrie descriptive, et de diriger le travail graphique qui devait faire partie de l'enseignement de cette science; on sentit la nécessité d'une école préparatoire, pour y former ces chefs d'étude.

Des jeunes gens (*), dont la plupart s'étaient distingués, ou à l'École du génie de Mézières, ou à l'École des ponts et chaussées de Paris, furent rappelés des armées; on fit pour eux un cours de géométrie descriptive, et pour la première fois à Paris, la méthode des projections fut enseignée et mise en pratique, comme elle l'était à l'ancienne École du génie de Mézières. Monge expliquait dans cette école préparatoire ses feuilles d'analyse, et j'étais principalement chargé de l'enseignement de la géométrie descriptive. Cette instruction préliminaire s'est donnée pendant les derniers mois de 1794; les cours de l'École polytechnique ont été ouverts au commencement de l'année 1795. Monge fit, pendant les trois premiers mois, vingt-quatre leçons sur la géométrie descriptive; il a rendu un compte sommaire de ce cours, dans le premier cahier du Journal de l'École polytechnique (pag. 6, année 1795); le programme suivant, qu'il a rédigé et publié à la même époque, fait connaître le sujet des vingt-quatre leçons :

1^{re} Leçon. Exposition de la méthode des projections; procédés qui en facilitent l'usage.

2^e Leçon. Détermination des plans tangens et des normales aux surfaces courbes; des tangentes et des plans normaux aux courbes à double courbure.

(*) Noms des élèves, premiers chefs d'étude de l'École polytechnique. — MM. Anselin, Berge, Biot, Bouvet, Brochant, Bruslé, Callier, Cavenne, Chéron, Debaudre, Donop, Dupuis, Endel, Fayolles, Francœur, Guignet, Hauterrie, Hesse, Lancret, Lashure, Malus, Pallu, Patural, Rey, Saint-Genis.

3 *Leçon.* Construction des intersections des surfaces courbes ; exemples du genre de questions à la solution desquelles cette méthode est principalement propre.

4^e *Leçon.* Génération, propriétés et constructions des surfaces développables, et de toutes celles qui sont engendrées par le mouvement d'une ligne droite.

5^e *Leçon.* Examen des deux courbures d'une surface courbe en général ; de la manière dont elle est divisée par les deux systèmes de ses lignes de courbure ; de la position des deux surfaces qui passent par ses centres de courbure.

6^e et 7^e *Leçons.* Application de la géométrie descriptive à la construction rigoureuse du contour de l'ombre d'un corps quelconque portée sur une surface quelconque, et à celle de la ligne qui sépare, sur la surface du corps qui porte ombre, la partie éclairée de la partie obscure, soit que l'objet lumineux fût un point unique, soit qu'il eût des dimensions finies.

8^e *Leçon.* Principes de la perspective aérienne. Dégradation des teintes, soit dans l'ombre, soit dans le jour, suivant la position des parties de la surface des corps, et par rapport à l'objet lumineux, et par rapport à l'observateur. Altérations qu'elles paraissent éprouver dans leurs couleurs propres, d'après la nature des corps lumineux, et d'après les jugemens que nous sommes induits à porter, par les circonstances environnantes.

9^e *Leçon.* Application de la géométrie descriptive aux constructions de la perspective linéaire.

10^e, 11^e et 12^e *Leçons.* De la coupe des pierres. Ordonnance des voûtes et voussures. Convenances auxquelles elles doivent satisfaire. Décomposition des voûtes en voussours. Procédés par lesquels on donne à chacune des pierres qui entrent dans la composition d'un édifice la forme qu'elle doit avoir. Usage de la géométrie descriptive pour cet objet.

13^e, 14^e, 15^e et 16^e *Leçons.* De l'art de la charpenterie. Ordonnance générale des ouvrages de charpenterie. Procédés par lesquels on donne à chaque pièce la figure qu'elle doit avoir, 1^o lorsque la pièce est droite, 2^o lorsqu'elle doit être terminée par des surfaces courbes. Usage de la géométrie descriptive pour cet objet.

PRÉFACE.

17^e, 18^e, 19^e et 20^e *Leçons*. De la topographie. Méthodes par lesquelles on détermine avec précision la position des principaux points d'une grande carte. Moyens par lesquels on exécute les remplissages.

Les différens procédés de nivellement. De l'art de figurer sur les cartes les formes et les accidens du terrain.

21^e, 22^e, 23 et 24^e *Leçons*. Exposition des divers mécanismes au moyen desquels on peut convertir, les uns dans les autres, les différens genres de mouvement. Mécanismes par lesquels on facilite les mouvemens de tous genres. Description des principales machines connues dans les arts, et mues par des animaux, ou par des forces prises dans la nature. (*Fin du programme.*)

A peine le premier cours de Monge à l'École polytechnique fut-il terminé, qu'une réunion de douze cents élèves fut conçue et effectuée en quelques semaines; elle avait pour objet de former des professeurs pour tous les genres d'instruction scientifiques et littéraires. Monge fut chargé d'enseigner la géométrie descriptive dans ces premières écoles normales; M. Laeroix et moi y fûmes appelés comme professeurs adjoints (*). Les leçons de Monge, recueillies par des sténographes, revues par lui-même, ont été imprimées en 1795, dans le *Journal des Écoles normales*, et réunies quatre ans après en un seul corps d'ouvrage. Le recueil de ces leçons est le premier traité de géométrie descriptive dans lequel on a considéré cette science d'une manière abstraite, et indépendamment de ses applications.

Les Mémoires d'analyse appliquée à la géométrie, avaient déjà placé Monge au rang des géomètres les plus distingués; son traité de géométrie descriptive, quoique dégagé de tout calcul, ne porte pas moins l'empreinte du génie dont la nature l'avait doué. On y reconnaît cette faculté d'imagination qui lui faisait découvrir les propriétés de l'étendue figurée: un style clair et précis, une rédaction soignée, ont placé cet ouvrage au rang des livres classiques de premier ordre. Plusieurs

(*) Les autres professeurs pour les sciences étaient: MM. Laplace, Lagrange, pour les mathématiques; M. Haüy, pour la physique; M. Bertholet, pour la chimie; MM. Thouin et Daubenton, pour l'histoire naturelle et l'agriculture.

M. Laeroix avait déjà composé à cette époque la plus grande partie de ses *Essais* sur la géométrie à trois dimensions, qu'il a publiés la même année 1795.

éditions se sont succédé sans aucun changement. La dernière, faite de son vivant, parut en 1811, avec un supplément qu'il avait jugé digne d'être placé à la suite de son ouvrage; le nouveau traité que je publie maintenant contient ce supplément, et de plus, les additions qui m'ont paru nécessaires pour en faire un ouvrage plus complet.

DIVISION DE L'OUVRAGE.

Ce traité est divisé en deux livres : le premier contient la géométrie descriptive pure ; le second renferme deux chapitres qui ont pour titres : 1° *Lieux géométriques* ; 2° *Ombres et perspectives linéaires*.

L'ouvrage est terminé par un appendice dans lequel j'expose les principes de la stéréotomie, et les procédés généraux de cet art, appliqués à la coupe des pierres.

LIVRE PREMIER. — *Géométrie descriptive pure.*

La géométrie descriptive, telle qu'on la considère dans ce premier livre, contient deux parties, l'une *rationnelle* (*), et l'autre *technique*.

La première, purement théorique, se rattache à une branche importante des mathématiques, qui embrasse toutes les propriétés de l'étendue figurée, et que les plus grands géomètres ont traitée ou par l'analyse ou par la synthèse.

La partie technique de la géométrie descriptive est l'art de représenter sur des feuilles de dessin, les points et les lignes de l'espace ; elle a pour base la méthode des projections ; la pratique de cette méthode exige un coup d'œil assuré, une main exercée, qui sache employer avec adresse la règle, le compas et l'équerre.

La géométrie descriptive est un art, lorsqu'elle a pour objet la description des solides et des surfaces données ; elle doit être regardée

(*) Les propositions principales de la partie rationnelle de la géométrie descriptive ont été réunies dans un ouvrage que j'ai publié en 1817, sous le titre d'*Elémens de géométrie à trois dimensions* (1 vol. in-8°, Firmin Didot). Plusieurs questions de géométrie descriptive ont été l'objet de nouvelles recherches sur les courbures des lignes et des surfaces ; j'en ai exposé les résultats dans un *Second Supplément à la géométrie de Monge* (1 vol. in-4°, Firmin Didot, 1818).

comme un complément des méthodes géométriques, lorsqu'on l'emploie pour déterminer des formes secondaires inconnues, qui résultent nécessairement de formes primitives données.

Monge l'a considérée sous ce double rapport dans ses leçons aux Écoles normales; mais il a dû pour ces écoles se borner à l'exposition des méthodes générales, et traiter fort brièvement la partie technique de la géométrie descriptive. Des neuf leçons qu'il a données (du 20 janvier au 10 avril 1795), les deux dernières contiennent des résultats de l'analyse appliquée à la géométrie; sept seulement sont consacrées à la géométrie descriptive pure. Si l'on observe que notre cours à l'École polytechnique se composait de quatre-vingt-dix à cent leçons; qu'il était spécialement destiné aux élèves ingénieurs des services publics, pour qui la partie technique de la géométrie est de la plus haute importance, j'espère qu'on appréciera les motifs qui m'ont déterminé à traiter les mêmes questions du livre de Monge, en insistant davantage sur la construction des épures. J'ai fait à ce livre d'autres additions qui ne sont pas moins nécessaires pour l'application de la géométrie descriptive aux ombres, à la perspective et à la stéréotomie; je vais les indiquer brièvement.

CHAP. I. — *Des préliminaires.*

La solution d'un problème quelconque de géométrie descriptive consiste à trouver un ou plusieurs points de l'espace, d'après certaines conditions qui déterminent la position de ces points. Je rappelle ce que j'ai déjà indiqué dans mes élémens de géométrie à trois dimensions (année 1817), que toutes les opérations graphiques qui conduisent à la solution du problème proposé se réduisent à celles qui sont nécessaires pour résoudre les deux questions suivantes :

1^{re} QUESTION. *Trouver la distance de deux points, dont on a les projections orthogonales sur deux plans rectangulaires?*

2^e QUESTION. *Une droite étant donnée par ses deux projections orthogonales sur deux plans rectangulaires, trouver les projections du point d'intersection de cette droite et d'un troisième plan, dont la position par rapport aux deux premiers, est aussi donnée?*

Le tableau des constructions graphiques d'une épure quelconque de géométrie descriptive, n'offre jamais que la répétition des opérations élémentaires qui donnent la solution des deux questions précédentes.

CHAP. II. — *Des plans tangens aux surfaces courbes.*

On admet en géométrie qu'un plan tangent en un point donné d'une surface, est déterminé par les tangentes à deux lignes de la surface, qui passent par ce point. Monge n'avait considéré dans sa Géométrie que les plans tangens aux surfaces dont les rayons de courbure en un point de ces surfaces, sont dirigés dans le même sens; mais les surfaces qui ne satisfont pas à cette condition, sont remarquables en ce que leurs plans tangens sont en même temps tangens et sécans. J'ai donné pour exemples de cette seconde espèce de plans tangens, ceux qui sont tangens aux surfaces à élémens gauches, et à la surface annulaire connue en architecture sous le nom de Tôle (*Voyez* art. 121, liv. 1^{re} de ce traité).

On a appelé jusqu'à présent *surface gauche*, toute surface engendrée par une droite mobile, quelle que soit la loi du mouvement de cette droite, pourvu néanmoins que deux droites consécutives, qui comprennent un élément de la surface, ne se rencontrent pas. Chaque élément est un petit *plan gauche*; mais l'ensemble de ces élémens forme souvent des surfaces très-régulières, qui ne conservent aucune apparence de difformité. Nous étions convenus avec Monge de les appeler *surfaces réglées*; ce qui motive cette dénomination, c'est qu'on peut appliquer une règle sur les droites de la surface, et s'assurer ainsi qu'elle est exécutée rigoureusement.

Après avoir établi par une discussion plus complète que celle d'Euler, la division des surfaces du second degré en cinq espèces que j'ai nommées *ellipsoïde*, *hyperboloïde à une nappe*, *hyperboloïde à deux nappes*, *paraboloïde elliptique*, *paraboloïde hyperbolique*, je me suis principalement occupé de la recherche des propriétés géométriques des deux surfaces réglées du second degré, l'hyperboloïde à une nappe, et le paraboloïde hyperbolique ou *plan gauche*.

Les propriétés les plus remarquables de ces surfaces, sont, 1^o que toute surface réglée a pour surface normale suivant une droite, un hyperboloïde à une nappe, ou un *plan gauche* dont les paramètres

varient pour chaque droite; 2° que toute surface réglée a pour surface osculatrice suivant une droite, un hyperboloïde à une nappe déterminé, dont les paramètres varient pour chaque droite; 3° que toute surface réglée a pour surfaces tangentes suivant une droite, une infinité d'hyperboloïdes à une nappe; 4° que deux surfaces réglées qui ont une droite commune et trois plans tangens communs en trois points différens de cette droite, sont tangentes l'une à l'autre dans tous les points de la droite qui leur est commune.

J'ai déduit de ces propriétés une méthode graphique pour mener les plans tangens à une surface quelconque engendrée par la ligne droite, ainsi que pour construire la tangente en un point d'une courbe, lorsque cette courbe est donnée en relief ou par ses projections. J'ai appliqué cette méthode à plusieurs surfaces réglées, employées pour la construction des voûtes.

CHAP. III. — *Des intersections de surfaces.*

Une surface est définie, lorsque pour chacun de ses points, on assigne la forme et la position d'une ligne mobile, génératrice de la surface. Pour trouver l'intersection d'une surface par un plan, on cherche les points d'intersection de ce plan et de la génératrice considérée dans ses positions successives; la ligne qui joint tous ces points est l'intersection de la surface par le plan donné. La tangente en un point quelconque de la section plane de la surface est la droite, intersection du plan tangent à la surface en ce point, et du plan de la section. Lorsque le contour de la section est une courbe à une ou plusieurs branches infinies, les tangentes aux points situés à l'infini, placées à une distance finie d'un point de la courbe, se nomment *asymptotes*. J'ai fait voir comment on déterminait les asymptotes, dans le cas où la surface proposée est un cône du second degré, ou un hyperboloïde à une nappe, ou un paraboloïde hyperbolique.

On obtient en général la ligne d'intersection de deux surfaces, en les coupant par un système de plans. Les sections de l'une et de l'autre surface, qui sont contenues dans un même plan, et dont les contours se rencontrent, déterminent les points communs aux deux surfaces. Non-seulement il importe, dans chaque cas particulier, de choisir le système de plans coupans, qui donne les constructions les plus simples;

mais il n'est pas moins utile de connaître les plans conpans limites, entre lesquels la ligne d'intersection des deux surfaces est comprise. J'ai fait voir comment on déterminait les plans limites pour plusieurs cas particuliers, et notamment pour deux cylindres et deux cônes. Les lignes d'intersection de ces surfaces ont des branches fermées ou infinies; j'ai indiqué un moyen pour reconnaître *a priori* l'existence des branches infinies, et pour construire leurs asymptotes. La solution de ces questions a complété ce que Monge avait écrit sur l'intersection de ces surfaces.

J'ai ajouté un article sur l'usage qu'on peut faire, dans quelques cas particuliers, des projections obliques, pour trouver l'intersection des deux surfaces, plus simplement que par la méthode des projections orthogonales. D'autres additions que j'ai faites à la géométrie de Monge appartiennent au livre suivant des applications.

LIVRE II.—*Des applications.*—CHAP. I.—*Des lieux géométriques.*

On appelle *lieu géométrique d'un point*, la ligne ou la surface qui contient ce point. Lorsque, d'après l'énoncé d'un problème, un point doit se trouver sur trois surfaces connues, ces surfaces et leurs lignes d'intersection sont des lieux géométriques du point demandé; on trouve les projections de ce point, en construisant les intersections des trois surfaces prises deux à deux. J'ai considéré le cas où l'une seulement des trois surfaces est de révolution; j'ai fait voir que dans ce cas il suffisait de construire la courbe à double courbure, intersection des deux surfaces non de révolution; qu'on en déduisait une seconde courbe située dans un plan méridien de la surface de révolution, et que les points communs aux trois surfaces proposées étaient déterminés par la rencontre de la seconde courbe, et du contour de la section méridienne de la surface de révolution.

Ce mode de solution, que j'ai appliqué à plusieurs problèmes de la Géométrie de Monge, a l'avantage de faire connaître les données d'après lesquelles on trouve le plus grand nombre de points qui satisfont aux conditions de ces problèmes.

Le chapitre suivant, et l'appendice qui termine ce traité, contiennent

des applications de la géométrie descriptive, qui n'ont pas été écrites par Monge.

CHAP. II. — *Des ombres et de la perspective.*

Une théorie complète des ombres, celle qui serait nécessaire aux artistes, peintres et dessinateurs, comprendrait l'examen de tous les phénomènes de la lumière, tant sur les corps que dans les milieux que le fluide traverse. Il faudrait avoir égard à la forme et aux dimensions du corps lumineux; à l'action de la lumière directe, aux effets de la lumière réfléchie ou par le milieu ou par les corps eux-mêmes; enfin, on considérerait les couleurs et leurs diverses nuances. L'ingénieur constructeur n'emprunte aux arts du dessin d'imitation que des résultats démontrés, qui ont pour objet de faciliter l'intelligence du *dessin géométral*. On fait abstraction pour ce dernier genre de dessin, de la forme du corps lumineux et de la couleur des objets éclairés; on n'admet qu'un seul point lumineux à une distance finie ou infinie des corps éclairés; on n'a point égard à la faculté qu'ont tous les corps de réfléchir la lumière directe en plus ou moins grande quantité; ce qui les rend eux-mêmes des corps lumineux. Il résulte de ces diverses suppositions, que les espaces ombrés ont pour enveloppes des surfaces coniques ou cylindriques; que ces enveloppes sont tangentes aux surfaces des corps éclairés, suivant les lignes qui séparent l'ombre de la lumière, et qu'on nomme, par cette raison, *lignes de séparation d'ombre et de lumière*.

Les surfaces des ombres, prolongées au-delà des lignes de séparation d'ombre et de lumière, coupent ou les surfaces des corps éclairés, ou les surfaces d'autres corps environnans; les lignes d'intersection de ces surfaces forment les contours des ombres portées. Je nomme ces contours, et les lignes de séparation d'ombre et de lumière, *ombres linéaires*, pour les distinguer des surfaces auxquelles elles appartiennent.

La détermination des ombres linéaires se réduit à deux problèmes de géométrie; le premier consiste à trouver sur un corps donné, la ligne de séparation d'ombre et de lumière; le second, à construire l'intersection d'un cône ou d'un cylindre qui a pour base cette ligne, par une

surface donnée: j'ai fait voir que dans l'hypothèse où les rayons lumineux partent d'un seul point, la théorie des ombres linéaires comprend la *perspective linéaire*.

Après avoir exposé les méthodes générales connues, qui sont applicables au tracé des ombres et des perspectives linéaires, j'ai considéré les trois familles de surfaces qu'on emploie le plus souvent dans les arts, savoir : les surfaces développables, les surfaces de révolution, et les surfaces à élémens gauches, *autrement* surfaces réglées. J'ai montré comment, pour ces deux derniers genres de surfaces, les problèmes d'ombres et de perspectives pouvaient se résoudre par une méthode particulière, plus simple et plus exacte dans la pratique que la méthode générale; elle consiste à déterminer la ligne de contact d'une surface *enveloppe* et d'un cône dont le sommet est donné.

Pour comprendre le principe sur lequel cette méthode particulière est fondée, il faut considérer sur une enveloppée mobile, deux lignes, la *caractéristique*, qui est l'intersection de deux enveloppées consécutives, et la courbe de contact de la première enveloppée avec un cône tangent à cette enveloppée, qui a même sommet que le cône tangent à l'enveloppe. Si ces deux lignes se coupent, le point d'intersection appartient à la courbe de contact de l'enveloppe et du cône tangent à cette enveloppée, qui a son sommet en un point donné.

C'est d'après cette considération qu'on trouve les lignes de séparation d'ombre et de lumière, sur les surfaces où réglées, ou de révolution. Les premières ont pour enveloppées des hyperboloïdes à une nappe, ou des paraboloides hyperboliques; les secondes des cônes droits, des sphères ou des cylindres: ces enveloppées, d'une génération plus simple que celle de leurs enveloppes, ont pour caractéristiques des droites et des cercles.

Après avoir indiqué un moyen pour trouver les points limites des ombres linéaires et des contours apparens, sur des portions de surfaces renfermées dans des courbes données, j'ai considéré les points les plus apparens des surfaces qu'on nomme *points brillans*. Le point brillant est sur un corps parfaitement poli, le seul point visible de ce corps, qui réfléchit un rayon de lumière vers l'œil du spectateur. En supposant que le corps soit mat et néanmoins visible, le *point brillant* devient le

plus apparent. J'ai fait voir comment on détermine géométriquement ce point sur une surface quelconque définie, et de quelle manière on simplifie cette solution générale pour le cas particulier des surfaces de révolution. Plusieurs questions relatives aux points brillants et aux lignes de *pénombres*, sont suivies de la construction des perspectives linéaires, par la méthode la plus usitée et connue depuis long-temps, qu'on nomme *Méthode par les points de concours*.

J'ai ajouté au livre des ombres et de la perspective, 1^o l'explication des anamorphoses vues directement ou par réflexion, sur des miroirs cylindriques ou coniques; 2^o la construction des mappemondes par la projection stéréographique.

L'appendice qui termine ce traité contient les principes de la stéréotomie, et des notices explicatives sur les épures de coupe de pierres jointes à cet appendice (*).

Le travail de Monge sur la géométrie descriptive est connu par les leçons qu'il a données aux Écoles normales de 1795, et par la première collection d'épures que nous fîmes graver la même année, pour l'usage de l'École polytechnique (**). Ce nouveau traité, et les dessins qui s'y

(*) Immédiatement après la leçon de géométrie descriptive, les élèves de l'École polytechnique dessinent l'épure que le professeur a expliquée; ils sont aidés dans ce travail graphique par l'épure gravée qu'on a distribuée à chacun d'eux, et par un ou plusieurs modèles placés dans chaque salle d'études; ces modèles sont en bois pour la charpente, et coulés en plâtre pour la coupe des pierres. La personne qui distribue les épures aux élèves est en même temps chargée de la conservation et de la construction des modèles. Cette place d'artiste conservateur est depuis long-temps remplie avec distinction par M. Broechi, à qui l'on peut s'adresser pour avoir des modèles en relief, relatifs aux questions de géométrie descriptive pure et appliquée. On trouve aussi chez lui des modèles de charpente, construits d'après les dessins qui faisaient partie de la collection de nos épures en 1816.

(**) Avant l'ouverture des cours de l'École polytechnique, on avait formé un bureau de dessinateurs, qui était dirigé par M. Eisenman, actuellement ingénieur et bibliothécaire de l'École des ponts et chaussées. Chaque professeur fit préparer dans ce bureau le porte-feuille de l'enseignement dont il était chargé. Les dessins, mis au net, furent gravés et distribués aux élèves. Les modèles des épures pour les applications de la géométrie descriptive, qui servirent à l'enseignement en 1795, ont été extraits de l'ouvrage de *La Rue*, et des cahiers manuscrits de l'ancienne École du génie de Mézières. Plusieurs dessinateurs du bureau dirigée par M. Eisenman, furent attachés à l'École polytechnique, et l'un d'eux, M. Girard, n'a pas cessé d'appartenir à cet établissement. On reconnaîtra le talent de cet habile professeur, dans les épures de ce traité de géométrie descriptive, que j'avais fait dessiner pour mes cours de l'École polytechnique.

trouvent joints, constatent l'état auquel s'était élevé, en 1816, l'enseignement de la géométrie descriptive, dont je demeurai seul chargé depuis 1797, deux ans après l'établissement de l'École polytechnique.

Deux professeurs de cette École (Monge et moi), enseignions la géométrie descriptive et l'analyse appliquée à cette géométrie; Monge, à son retour d'Égypte (en 1800), continua à professer l'analyse; en 1810, il fut remplacé pour ce cours, par M. Arago, à qui l'on confia de plus l'enseignement de la géodésie et de la géométrie descriptive pure. En avril 1808, M. Binet (J.-P.-M.), actuellement (1822) inspecteur des études, avait été nommé répétiteur pour nos cours; il en a rempli les fonctions jusqu'en 1815, époque à laquelle il fut appelé à la place de professeur de mécanique, laissée vacante par M. Poisson, qui passait aux fonctions d'examineur permanent, pour l'admission dans les services publics.

A l'avantage d'être secondé par des collaborateurs du premier mérite, se joignait celui d'être, par les devoirs de ma place, en relation habituelle avec des élèves; dont l'émulation amenait, chaque année, des perfectionnements dans l'enseignement de la géométrie descriptive. Leurs observations, les difficultés résolues, ont été en partie recueillies par les soins des professeurs de l'École polytechnique; ce nouveau recueil plus complet, contribuera, j'espère, à propager une doctrine féconde dans ses applications, qui est le fruit de vingt ans de travail dans une École, dont la célébrité atteste les services qu'elle rend journellement aux arts et aux sciences.

ŒUVRAGES PRINCIPAUX DE STÉRÉOTOMIE ET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Théorie et pratique de la coupe des pierres, 3 vol. in-4^e, par Frézier, ingénieur en chef à Landau.

Première édition de Strasbourg, 1739; seconde édition de Paris, 1754, 3 vol. in-4^e.

Éléments de Stéréotomie, à l'usage de l'architecture pour la coupe des pierres, par Frézier.
2 vol. in-8^e, Paris, 1760.

Nouveaux principes de perspective linéaire, par Taylor (auteur du théorème qui porte son nom; né en 1685, mort en 1731). Cet ouvrage a été traduit de l'anglais en français, en 1757.

Leçons de géométrie descriptive, par Gaspard Monge (né le 10 mai 1746, décédé le 28 juillet 1818); 1 vol. in-4^e, Paris, 1799; extraites du *Journal des Écoles normales*. In 8^e, Paris, 1795.

Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes, par M. Lacroix (Sylvestre-François).
1 vol. in-8^e. Première édition, 1793; quatrième édition, 1812.

Cet ouvrage fait partie d'un cours complet de mathématiques, qui a été traduit en anglais, en allemand et en italien. (Le cours entier comprend neuf volumes in-8^e.)

Développemens de géométrie, par M. Charles Dupin, 1 v. in-4^e, Paris, 1813.

De la Richesse minérale, 3 vol. in-4^e; par M. Héron de Villefosse, inspecteur divisionnaire du Corps royal des mines de France. Paris, 1819.

Cet ouvrage renferme d'utiles et nombreuses applications de la géométrie descriptive à la construction des cartes et machines employées dans l'exploitation des mines.

Traité théorique et pratique de l'art de bâtir, par J. Rondelet, architecte du Panthéon français.
Tome II, cône des pierres, année 1814.

Traité de géométrie descriptive, par M. Potier. 1 vol. in-8^e de 96 pag. et 2 pl. Paris, 1817.

Traité de géométrie descriptive, par M. Vallée (Louis-Léger), ingénieur des ponts et chaussées, élève de l'École polytechnique en 1801. 1 vol. in-4^e, avec 60 planches. Paris, 1819.

Traité de la science du dessin, 1 vol. in-4^e, 56 planches, par le même. Paris, septembre 1821.

Études des ombres, à l'usage des écoles d'architecture; par M. Lavoillé, ingénieur en chef au Corps royal des ponts et chaussées. 1 vol. in-4^e, 15 planches. Paris, 1812.

Traité spécial de coupe des pierres, par M. Douliot, professeur d'architecture et de construction à l'École royale gratuite de mathématiques et de dessin. 2 vol. in-4^e, Paris, 1824 et 1825.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, contenant

1^o Plusieurs Mémoires sur les fortifications, par MM. Dobenheim, Say, officiers du génie. Cahiers numéros 1—4.

2^o Sur la Gnomonique, par M. Le François. Onzième cahier, année 1802.

3^o Essais sur l'art de projeter les canaux de navigation, par MM. Brisson-Huart et Dupois-Torey, ingénieurs des ponts et chaussées. Quatorzième cahier, année 1808.

4^o Sur les moyens généraux de construire des cercles et des sphères, qui satisfont à certaines conditions; par M. Gaultier, professeur de géométrie descriptive au Conservatoire des arts et métiers. Seizième cahier, année 1813.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

CHAP. I. — § I. Définition de la géométrie descriptive et de la méthode des projections.	PAGES.	ARTICLES.
	1 — 2	1 — 2
§ II. Préliminaires.	2 — 4	3 — 6
§ III. Du point et de la ligne droite.	4 — 6	7 — 9
§ IV. Solutions de divers problèmes relatifs à la ligne droite et au plan.	6 — 22	10 — 38
Du parallépipède capable de trois droites.	23 — 34	39 — 42
CHAP. II. — § I. Des tangentes aux courbes, et des plans tangents aux surfaces courbes.	25 — 26	43 — 46
§ II. De la génération des surfaces.	26 — 30	47 — 52
§ III. Exemples de plans tangents aux surfaces.	30 — 40	53 — 65
CHAP. III. — § I. Des intersections de surfaces courbes par des plans; des tangentes aux lignes d'intersection.	41 — 42	76 — 68
§ II. Des surfaces développables coupées par un plan.	42 — 56	69 — 95
Des sections coniques; de leurs foyers; du développement des surfaces. (Foyez note I ^{re} , page 289.)	56 — 63	95 — 112
§ III. Des surfaces de révolution coupées par un plan; du tore; de l'hyperboloïde de révolution.	63 — 74	113 — 132
§ IV. Des surfaces réglées coupées par un plan; de l'hyperboloïde à une nappe; du paraboloïde hyperbolique, ou <i>plan gauche</i> .	75 — 87	133 — 148
Des plans tangents aux surfaces réglées.	88 — 96	149 — 162
CHAP. IV. § I. Des intersections de surfaces courbes qui se pénètrent.	97 — 112	163 — 188
§ II. Intersection de deux surfaces de révolution.	112 — 118	189 — 201
§ III. De quelques surfaces du second degré, dont la ligne d'intersection est une courbe plane du même degré.	118 — 123	202 — 208
§ IV. Du choix des plans de projection; définition et usage de divers modes de projection.	123 — 130	209 — 220

LIVRE SECOND.

Applications de la géométrie descriptive.

CHAP. I. — Des lieux géométriques, et de leur usage pour résoudre diverses questions. <i>Treize problèmes.</i> (Foyez les notes II-V, pages 289-294.)	131 — 183	1 — 76
De la sphère tangente à quatre sphères données. (Foyez la note VI, page 295.)	183 — 197	77 — 93
De l'aire du triangle sphérique.	197 — 198	94 —

CHAP. II. Ombres et perspectives linéaires.	PAGES.	ARTICLES.
§ I. Introduction. (Voyez la note VII, page 296.)	199 — 204	93 — 103
§ II. Des ombres sur les dessins de la géométrie descriptive; de la perspective linéaire.	204 — 207	103 — 109
§ III. Constructions graphiques relatives aux ombres et à la perspective linéaires. (Voyez la note VIII, page 297.)	208 — 216	110 — 122
§ IV. Du tracé des ombres linéaires.	216 — 250	123 — 153
§ V. Exemples de lignes de séparation d'ombre et de lumière. (Voyez note IX, page 298.)	240 — 251	154 — 168
§ VI. Des points brillans; des surfaces de la pénombre.	251 — 258	169 — 176
Légendes de deux dessins d'ombres; pl. 15. O, 16. O. Notice sur les cadrans solaires; pl. 17. O.	258 — 262	177 — 178
CHAP. III. — § I. Du tracé de la perspective linéaire.		
§ II. Exemples de perspective linéaire par la méthode des points de concours. Perspective d'un chapiteau dorique. (Voyez la note X, page 298-300.)	262 — 281	179 — 202
§ III. Des anamorphoses.	281 — 283	203 — 205
§ IV. De la projection stéréographique.	284 — 288	206 — 216
NOTES des premier et second livres (voir notes).	289 — 300	• •

APPENDICE.

CHAPITRE I^{er}. — Stéréotomie.

§ I. Définition et procédés généraux de stéréotomie.	301 — 303	1 — 6
§ II. De la stéréotomie appliquée à un solide quelconque défini.	303 — 307	7 — 14
§ III. Application de la stéréotomie à la coupe des pierres.	307 — 310	15 — 20

CHAPITRE II. — Coupe des pierres.

§ I. Des portes. — § II. Des voûtes. — § III. Des descentes.	310 — 352	
§ IV. Des trompes. — § V. Des escaliers.		
Du tracé des épure à l'usage des appareilleurs; sur les qualités des pierres employées dans la construction des édifices.	353 — 354	

TABLE DES PLANCHES.

LIVRE PREMIER. (22 pl. in-4°.)

Nombre des planches.

CHAP. I ^{er} . — Préliminaires et solutions de divers problèmes relatifs à la ligne droite et au plan (*).	1 — 5 in-4°
CHAP. II. — Des tangentes aux courbes, et des plans tangens aux surfaces.	6 — 8
CHAP. III. — Des intersections de surfaces courbes par des plans.	9 — 15
Surfaces réglées du second degré.	16 "
Plans tangens aux surfaces réglées.	17 "
CHAP. IV. — Des intersections de surfaces courbes qui se pénètrent.	18 "
Intersection d'un cône et d'une sphère qui a pour centre le sommet du cône.	19 — 20
Intersections de deux cylindres et de deux cônes.	21 "
Intersections de deux surfaces de révolutions dont les axes se rencontrent, et de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes ne se rencontrent pas.	22 "
Méthodes particulières et abrégées, pour trouver les intersections des surfaces courbes.	

LIVRE DEUXIÈME.

APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

CHAP. I ^{er} . — Des lieux géométriques (9 pl. in-4°, 3 pl. in-fol.).	
Sphère inscrite ou circonscrite à une pyramide.	23 "
Solution de la pyramide triangulaire, comprenant la trigonométrie sphérique.	24 "
Plan tangent mené par une droite donnée, 1° à une sphère, 2° à une surface de révolution.	25 — 26
Tangente à l'hélice et à l'épicycloïde sphérique.	27 "
Intersection de trois cylindres.	28 in-4°
Intersection de trois cônes droits, à axes parallèles.	Pl. A in-f°
Solution de ce problème : Étant donnés un point et deux droites dans l'espace, mener par le point, un plan qui coupe les droites en deux autres points, tels que les trois points soient les sommets d'un triangle semblable à un triangle donné ?	29 in-4°
Solution de ce problème : Connaissant dans une pyramide triangulaire la base et les angles des arêtes opposés aux côtés de la base, construire le sommet de la pyramide ?	30 in-4°
Du contact des sphères par des plans et par d'autres sphères ; de l'intersection d'une sphère par un cône oblique du second degré ; de la projection stéréographique.	* Pl. B et C in-f°
Planche supplémentaire A, livres I et II.	31 in-4°
	32 Id. "

(*) La signature de l'auteur est au bas de la planche n° 1 de ce chapitre.

OMBRES ET PERSPECTIVES LINÉAIRES. (16 pl. in-4°, et 1 pl. in-folio.)

CHAP. II. — Ombres de deux cheminées sur un comble dit croupe droite.	1. O	in-4°.
Ombres d'une sphère.	2. O	
Ombres du puits militaire.	3. O	
Ombres d'une niche sphérique.	4. O	
Ombres d'une arche de pont en plein cintre.	5. O	
Ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un ellipsoïde de révolution.	6. O	
Ombres d'une vis à filets triangulaires.	7. O	
Pénombre sur la terre, et points brillant. (Cette planche et la planche 10. P. sont gravées sur le même cuivre.)	8. O	
Perspective d'un cylindre posé sur un socle.	9. P	
Perspective d'un piédoche.	10. P	
Perspectives par la méthode des points de concours. Anamorphoses vues par réflexion sur des miroirs courbes.	11. P — 14. P	
Ombres sur une base attique, et sur un chapiteau dorique.	15. O — 16. O	
Cadran solaire.	17. O	in-f°.
Perspective d'un chapiteau dorique.	18. P	in-4°.
Solution d'un cas particulier de perspective.	19. P	Id.

APPENDICE. (19 pl. in-4°, 1 pl. in-folio.)

Petites voûtes, dites portes.	1 — 4	in-4°.
Voûtes.	5 —	
Descentes.	9 — 12	
Trompes.	13 — 16	
Escaliers à noyau plein et à jour.	17 — 19	
Escalier à noyau plein, dit vis Saint-Gilles.	20	in-f°.

LIVRE I ^{er} .	22 planches in-4°.	
{ Lieux géométriques.	9	Id.
{ Planche supplémen-		3 planches in-folio.
LIVRE II.		
{ taire A, liv. I et II.	1	Id.
{ Ombres et perspectives.	18	Id.
APPENDICE. — Coupe des pierres.	19	Id.

Nombre total des planches. 69 planches in-4°. 5 planches in-folio.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.



CHAPITRE PREMIER. — § I^{er}.

Définition de la géométrie descriptive et de la méthode des projections.

1. La géométrie descriptive se compose de deux parties : l'une rationnelle, qui comprend les solutions synthétiques des problèmes relatifs aux propriétés de l'étendue ; l'autre simplement graphique, qui consiste dans l'art de représenter exactement la forme et la position des lignes situées dans l'espace. Cette représentation se fait sur des feuilles de dessin qu'on nomme *épure*s.

Un dessin de géométrie descriptive est le tableau des lignes et des surfaces qu'on a combinées pour arriver à la solution d'une question proposée. Après avoir tracé sur une *épure* les données d'un problème, on obtient, par une suite d'opérations graphiques, les points ou les lignes qui satisfont aux conditions de ce problème.

L'application la plus immédiate de la géométrie descriptive est la représentation des corps qui sont dans leur état naturel, ou dont les formes sont susceptibles de définition rigoureuse. Les arts libéraux, la sculpture, l'architecture, tous les arts dits *mécaniques*, qui ont pour but principal de donner à la matière brute des formes déterminées, empruntent à la géométrie descriptive des procédés graphiques, à l'aide desquels on représente fidèlement toutes les parties d'un objet en relief, avant que cet objet soit exécuté. Cette représentation se fait, pour la géographie, sur des cartes ou mappemondes ; pour l'architecture, sur des dessins qu'on nomme *plans*, *profils*, *élévations*, et plus généralement *dessins géométraux*. En considérant deux points quelconques sur un relief, la distance de ces deux points ne sera pas toujours donnée directement par les dessins géométraux ; mais on la déduira des lignes tracées sur des feuilles de dessin : cette propriété du dessin géométral le distingue des perspectives ordinaires.

Des opérations et du dessin de la géométrie descriptive.

2. Les opérations ou constructions de la géométrie descriptive comprennent d'abord celles qui servent à résoudre graphiquement les problèmes de la géométrie plane.

Lorsque de cette géométrie on passe à la géométrie de l'espace, qui considère les corps étendus aux trois dimensions, toutes les questions de cette partie de la science de l'étendue sont ramenés à la géométrie plane, par la construction des deux problèmes suivans :

1° Trouver la distance de deux points dont on a les projections ;

2° Construire le point d'intersection d'une droite et d'un plan.

On trace sur une épure les lignes droites et les cercles en se servant de trois instrumens, la règle, l'équerre et le compas. La plus grande difficulté du dessin graphique consiste à déduire une courbe d'un polygone, ou à réunir, par un trait uniforme à la plume ou au crayon, des points isolés d'une courbe placés à des distances finies les uns des autres. L'exactitude de ce tracé est aussi nécessaire en géométrie descriptive que la précision des calculs en arithmétique. Lorsqu'un point est déterminé par deux courbes dont il est l'intersection, sa position n'est rigoureusement déterminée que lorsque les deux courbes sont marquées d'un trait fin, exempt de toute discontinuité.

Une épure de géométrie descriptive n'étant que le tracé ou le tableau d'une conception géométrique, il faut d'abord combiner des lignes, des surfaces, prévoir tout ce qui résulte de leurs intersections, de leurs contacts, en un mot résoudre dans l'espace un problème de géométrie à trois dimensions, avant que la main puisse exécuter les opérations qui conduisent à la solution graphique de ce problème.

§ II. — PRÉLIMINAIRES DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Des projections d'un point, d'une droite, d'un polygone, d'une ligne quelconque.

3. Lorsque des points en nombre indéfini, placés à des distances finies les uns des autres, occupent un certain espace, on parvient à fixer leurs positions respectives, en concevant l'espace qui les contient, divisé en quatre parties égales par deux plans rectangulaires prolongés indéfiniment. On abaisse de chaque point de l'espace des perpendiculaires sur ces plans, et les

pieds de ces perpendiculaires, qu'on nomme *projections du point*, en déterminent la position. En effet, un point est donné lorsqu'il est l'intersection de deux droites connues; or la perpendiculaire à l'un des deux plans qui divisent l'espace, et qu'on nomme *plans de projection*, passe par le point que l'on considère et par sa projection sur le premier plan; la perpendiculaire au second plan de projection passe aussi par ce point, et par sa projection sur le second plan; donc le point unique, intersection des deux perpendiculaires connues, est le point de l'espace que l'on considère.

On suppose ordinairement que l'un des deux plans de projection est horizontal; dans cette hypothèse, l'autre plan est vertical, et les points de l'espace sont déterminés par leurs projections, qu'on nomme *horizontales* ou *verticales*, selon qu'elles appartiennent au plan horizontal ou au plan vertical de projection.

Cette convention pour déterminer la position d'un point de l'espace est analogue à celle que les géomètres ont adoptée pour déterminer la position respective d'un système de points situés dans un plan. Ils imaginent sur ce plan deux droites rectangulaires, que l'on nomme *axes des abscisses et des ordonnées*. De chaque point du plan on abaisse deux perpendiculaires, l'une sur l'axe des abscisses, et l'autre sur l'axe des ordonnées. Les parties des axes rectangulaires comprises entre le point où ces axes se coupent, et les projections d'un point du plan sur ces mêmes axes, se nomment *abscisses* et *ordonnées* de ce dernier point. Les abscisses et les ordonnées se comptent respectivement sur les axes des abscisses et des ordonnées. Les longueurs de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point du plan, le sens dans lequel on doit prendre ces longueurs sur les axes, déterminent les projections du point du plan sur les axes, et par conséquent la position de ce point. On nomme aussi *coordonnées* d'un point, l'abscisse et l'ordonnée de ce point, et *axes des coordonnées*, les droites rectangulaires sur lesquelles on compte les abscisses et les ordonnées.

4. Une ligne droite située dans l'espace a, comme l'un quelconque de ses points, deux projections. Si l'on conçoit par cette droite des plans perpendiculaires aux deux plans de projection, les droites intersections de ces plans sont les projections de la droite donnée. Généralement la projection d'une droite sur un plan quelconque est l'intersection commune de ce plan et d'un second plan mené par la droite perpendiculairement au premier.

En effet, une droite quelconque menée sur l'un des plans de projection, peut être considérée ou comme la trace d'un plan qui passerait par cette droite et qui serait perpendiculaire au plan de projection, ou comme la projection de toutes les droites contenues dans ce plan; donc, réciproquement

une droite donnée dans l'espace a pour projection, sur l'un des plans de projection, l'intersection de ce plan par un autre plan qui lui serait perpendiculaire, et qui passerait par la droite donnée; car cette intersection contient les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées de la droite dans l'espace sur le plan de projection; donc elle est la projection de cette droite.

5. Quel que soit le nombre des côtés d'un polygone continu ou discontinu, situés ou non dans le même plan, les projections des côtés de ce polygone sur les deux plans de projection, forment sur ces plans deux autres polygones qui déterminent la forme et la position du premier.

6. Une courbe n'étant qu'une suite de points liés entre eux par une loi de continuité, sa forme et sa position, à l'égard des plans de projection, seront déterminées par les projections des points pris sur cette courbe à des distances très-rapprochées. Plus ces distances seront petites, moins le polygone formé des petites droites qui joignent deux à deux les points consécutifs de la courbe, différera de cette courbe. Mais les deux projections d'un polygone (art. 5) en déterminent la forme et la position; donc elles déterminent également la courbe dont ce polygone est la limite.

Si la loi de continuité qui lie les points d'une ligne courbe, les assujétit à être dans un même plan, la courbe est *plane*; dans le cas contraire, la courbe est du genre de celles qu'on nomme *courbes à double courbure*.

§ III. — DU POINT ET DE LA LIGNE DROITE.

Dessin et explication des figures de la première épure.

7. On prépare la feuille de dessin, ou l'épure, de la manière suivante : Ayant rapproché les deux bords parallèles les plus longs, on comprime légèrement les milieux des bords opposés de la feuille; on mène par ces milieux une droite telle que ZZ' , et on élève avec la règle et le compas, sans le secours de l'équerre, la perpendiculaire XY , de manière que la feuille de dessin soit divisée en quatre parties à peu près égales. L'angle droit formé par les deux droites ZZ' , XY se nomme, dans les arts graphiques, *trait carré*.

Lorsque l'épure contient plusieurs figures, on fait pour chaque figure le trait carré; plusieurs traits carrés d'une même épure peuvent avoir un côté commun et d'autres côtés parallèles, ainsi qu'on le voit pl. 1^{re}. Soit XY , le côté du trait carré de la fig. 1, pl. 1, qu'on prend pour l'intersection des deux plans de projection; quoique ces deux plans soient perpendiculaires entre eux, il

faut les concevoir réunis sur la même feuille de dessin. On suppose que l'un des deux plans, l'horizontal par exemple, étant fixe, le plan vertical a tourné autour de la commune intersection XY comme charnière, pour s'abattre sur le plan horizontal. Il suit de cette hypothèse que les deux projections d'un point quelconque de l'espace sont situées sur une droite perpendiculaire à la commune intersection des deux plans de projection. En effet, ces projections sont des points du plan, qui est mené par le point de l'espace perpendiculairement à la commune intersection XY ; elles sont par conséquent sur les droites intersections de ce plan et des plans de projection. Mais ces droites, perpendiculaires entre elles, passent par le même point de la commune intersection des deux plans de projection, et sont aussi perpendiculaires à cette intersection; donc elles ne formeront qu'une seule et même droite, lorsque les deux plans de projection seront réunis sur la même feuille de dessin. Ainsi la droite Aa (fig. 1, pl. 1) qui joint les projections A et a d'un point de l'espace, est perpendiculaire à la droite XY , intersection des deux plans de projection réunis en un seul. Quoique les deux parties AB , Ba de la droite ABa ne forment qu'une seule droite qui coupe l'intersection commune XY au point B , il faut concevoir que ces deux parties sont les côtés d'un angle droit, dont le point B est le sommet; que l'un de ces côtés BA est sur le plan horizontal, et l'autre côté Ba sur le plan vertical. Ces côtés AB , aB mesurent les distances respectives du point de l'espace aux plans de projection, l'un vertical et l'autre horizontal.

8. Il est important de remarquer, 1° que la droite XY est l'intersection des deux plans de projection, et n'en est pas la limite. Ces plans se prolongent indéfiniment, et deux points placés d'une manière quelconque sur une droite perpendiculaire à XY correspondent nécessairement à un point déterminé de l'espace; de même deux droites quelconques AC , ac , menées sur les plans de projection, sont nécessairement les projections d'une droite dont la position dans l'espace est déterminée.

2° Que tous les points et toutes les lignes situées sur l'un des plans de projection se projettent sur l'autre plan, suivant la ligne d'intersection de ces deux plans; ce qui résulte de ce que ces plans de projection sont perpendiculaires entre eux;

3° Que lorsqu'une ligne droite ou courbe rencontre un plan de projection, ce point et sa projection coïncident; ou, que le point d'intersection d'une ligne et d'un plan de projection, appartient à la projection de la ligne sur ce plan.

Conventions pour l'explication des figures de Géométrie descriptive.

9. Pour désigner un point dans l'espace, nous écrirons en parenthèse les deux lettres qui correspondent à ses projections. Soient par exemple A et a les deux projections d'un point de l'espace, (A, a) désignera ce point. De même (B, b) désignera un autre point de l'espace dont les points B, b sont les projections. Par analogie, on écrira (AB, ab) , pour exprimer une droite de l'espace, dont les droites AB, ab sont les projections. Nous emploierons aussi par abréviation les signes algébriques $+$, $-$, $=$ à la place des mots *plus*, *moins*, *égale*.

§IV. — SOLUTIONS DE DIVERS PROBLÈMES RELATIFS À LA LIGNE DROITE ET AU PLAN.

Premier problème. — Étant données les deux projections d'une droite, construire les points où cette droite coupe les plans de projection (fig. 1, pl. 1).

10. *Solution.* Soient (pl. 1, fig. 1) AC et ac les projections données de la droite. Le point où cette droite coupe le plan vertical a pour projection horizontale un point C qui doit être et sur la droite XY intersection des deux plans de projection, et sur la droite donnée AC ; mais les deux projections d'un point de l'espace sont (art. 7) sur une droite perpendiculaire à la commune intersection XY des plans de projection; donc la perpendiculaire Cc à XY contiendra le point demandé. Ce point doit de plus se trouver sur la projection verticale donnée ac ; donc il est en c intersection des droites Cc et ac .

Prolongeant la droite donnée ac jusqu'en D , et élevant par le point D de la droite XY la perpendiculaire à cette droite Dd , qui coupe la projection horizontale AC au point d , ce point sera l'intersection de la droite dans l'espace et du plan horizontal. Si l'on conçoit un triangle rectangle qui a pour côtés les droites dC et Cc , l'hypothénuse de ce triangle, menée par les points d et c situés l'un sur le plan horizontal, et l'autre sur le plan vertical, sera la droite de l'espace qui coupe les plans de projection aux points d et c .

On peut encore déterminer ces points d et c , par la considération suivante.

Les projections AC, ac d'une droite D de l'espace, déterminent deux plans perpendiculaires aux plans de projection, dont chacun contient la droite D . Le premier de ces plans a pour trace sur le plan horizontal la droite AC , et pour trace sur le plan vertical, la verticale Cc ; d'où il suit que la droite D ne peut couper le plan vertical de projection qu'en un point de la droite Cc , mais ce point est aussi sur la droite donnée ac ; donc il est l'intersection des deux droites connues Cc, ac .

Le second plan qui contient la droite D de l'espace, a pour trace sur le plan horizontal, la droite Dd perpendiculaire à XY intersection des deux plans de projection; d'où il suit que la droite D ne peut couper le plan horizontal de projection qu'en un point d de la droite Dd ; mais ce point est aussi sur la droite donnée AC ; donc il est l'intersection des deux droites connues Dd , AC .

Deuxième problème. — Par un point donné dans l'espace, mener 1° une parallèle à une droite donnée; 2° trouver la grandeur d'une partie de cette droite? (fig. 2, pl. 1.)

11. *Solution.* Soient $A'C'$, $a'e'$ (pl. 1, fig. 2) les projections horizontale et verticale de la droite donnée; A et a les projections du point donné. Deux droites parallèles ont des projections parallèles; donc si l'on mène par les points donnés A et a des droites AC , ac respectivement parallèles aux projections données $A'C'$, $a'e'$, ces droites seront les projections de la droite demandée. Connaissant les projections AC , ac de la droite (AC, ac) de l'espace, on trouve par le problème précédent (art. 10) les points c et d où cette droite coupe les plans de projection.

La droite comprise entre le point donné (A, a) et un autre point quelconque (E, e) , a pour projections AE et ae . On construira la grandeur de cette partie de droite (AE, ae) , en la considérant comme le quatrième côté HI d'un trapèze $AEHI$, dont les côtés parallèles AI , EH sont respectivement égaux aux droites BA , Ge , qui mesurent les distances verticales des points (A, a) , (E, e) au plan horizontal. Cette longueur IH est aussi l'hypothénuse d'un triangle rectangle HIK dont le côté HK est égal à AE , et le côté IK égal à la différence La des deux droites BA , Ge . Menant par le point e la parallèle eL à XY , qui coupe la verticale Ba au point L , et portant de L en M une longueur LM égale à AE ou AE' , on aura un triangle rectangle aLM , égal au triangle HIK , dont l'hypothénuse aM est la longueur de la droite (AE, ae) .

DU PLAN.

12. Le plan est une surface sur laquelle on peut appliquer une ligne droite dans tous les sens. Deux droites qui joignent trois points quelconques de ce plan suffisent pour déterminer sa position.

Un plan dans l'espace, et les deux plans de projection auxquels on le rapporte, comprennent un angle trièdre, dont le sommet est sur la commune intersection des deux plans de projection. Des trois droites qui forment ces

angle, l'une est cette commune intersection ; les deux autres sont les *traces* du plan dans l'espace sur les deux plans de projection. Connaissant ces traces, la position du *plan* dans l'espace est déterminée.

Soit (*pl. 1, fig. 3*) la commune intersection des deux plans de projection ; M un point de cette droite par lequel on a mené sur les plans de projection les droites ML et Mn, situées l'une sur le plan horizontal, et l'autre sur le plan vertical ; ces droites sont les traces d'un plan dans l'espace. L'angle trièdre qu'elles forment avec la commune intersection XY, a son sommet au point M.

Lorsqu'un plan passe par trois points ou par deux droites données sur les plans de projection, on désigne ce plan par les lettres qui correspondent sur la figure aux points et aux droites donnés. Ainsi la notation, *plan* (LM, Mn), indique un plan qui a pour traces horizontales les droites LM, Mn. Celle-ci, *plan* (L, M, n), indique un plan qui passe par les trois points L, M, n.

Troisième problème.— Par un point donné mener un plan parallèle à un autre plan donné, et construire ses traces sur les plans de projection (*fig. 3, pl. 1*).

13. *Solution.* On donne un point par ses deux projections, un plan par ses deux traces sur les plans de projection, et il s'agit de mener par le point donné un plan parallèle à celui dont on connaît les traces.

Les traces des plans parallèles sur chaque plan de projection sont des droites parallèles ; or, le plan demandé qui passe par un point donné, passe aussi par des droites menées par ce point parallèlement aux traces du plan donné ; donc la question proposée est ramenée à celle-ci, qu'on a résolue art. 11 : Mener par un point donné, des parallèles aux traces d'un plan données sur les plans de projection ? Connaissant ces parallèles, on construira (art. 10) les points où elles rencontrent les plans de projection, et ces points appartiendront aux traces demandées.

Soient A, *a* (*fig. 3, pl. 1*) les projections du point donné ; LM, Mn les traces du plan, données sur les plans de projection. La parallèle à la trace Mn, menée par le point (A, *a*), a pour projections les droites *ab*, AB parallèles, l'une à Mn, et l'autre à XY, intersection des deux plans de projection.

Cette parallèle coupe le plan horizontal au point B, qui détermine les traces L'B' et M'n', parallèles respectivement aux traces données LM et Mn.

On aurait pu mener par le point (A, *a*) une parallèle (AD, *ae*) à la trace horizontale LM ; cette parallèle rencontrerait le plan vertical au point *e* ; on tirerait par ce point la parallèle eM' à la trace Mn, qui couperait la commune intersection XY au point M' ; menant par ce point la parallèle M'L' à la trace

donnée MI , le plan demandé serait déterminé par ses deux traces $L'M'$, $M'a'$; cette seconde construction sert de vérification à la première.

14. Le problème qu'on vient de résoudre est un cas particulier de celui-ci :

Mener par un point donné un plan parallèle à deux droites données?

Lorsqu'on suppose que les droites données sont situées, l'une sur le plan horizontal de projection, l'autre sur le plan vertical, et qu'elles se coupent en un point de la commune intersection de ces deux plans, la question se réduit à mener par un point un plan parallèle à un autre plan, dont on a les traces sur les plans de projection. Dans le cas général, où les deux droites sont données par leurs projections, on observera qu'un plan est parallèle à une droite, lorsqu'il passe par une parallèle à cette droite, et qu'un plan parallèle à une droite, coupe tous les plans qu'on peut mener par cette droite, suivant des droites parallèles entre elles, et parallèles à la droite donnée.

Ainsi, par le point donné, on mènera (art. 11) des parallèles aux deux droites données, et le plan de ces deux parallèles sera le plan demandé.

Lorsque le point donné est sur l'une des deux droites, et qu'on mène par ce point une parallèle à l'autre droite, le plan mené par cette parallèle et par la première droite, est encore parallèle aux deux droites.

Quatrième problème. — Construire sur les plans de projection, les traces d'un plan qui passe par trois points donnés dans l'espace? (Pl. 1, fig. 4.)

15. *Solution.* On joint les trois points donnés par trois droites, et les points de rencontre de ces droites avec les plans de projection déterminent les traces demandées.

(Pl. 1, fig. 4). Soient (A, a) , (B, b) , (C, c) les trois points donnés; on joint ces points par trois droites (AB, ab) , (BC, bc) , (AC, ac) , qui coupent le plan horizontal en trois points D, F, E , et le plan vertical en trois autres points d, f, e ; les droites DfE et dfe prolongées, qui se coupent en un point M de la commune intersection XY des deux plans de projection, sont les traces du plan mené par les trois points donnés.

Des trois points D, F, E , ou d, f, e , deux seulement sont nécessaires pour déterminer, ou la trace horizontale DfE , ou la trace verticale dfe . L'une de ces traces étant connue, on en déduit la seconde trace par un seul point, en prolongeant la première jusqu'à la commune intersection XY .

Cinquième problème. — Deux plans étant donnés par leurs traces sur les plans de projection; 1° construire les projections de leur ligne d'intersection, 2° mener par un point donné, une droite parallèle aux deux plans? (Pl. 2, fig. 1.)

16. *Solution.* Les traces de deux plans sur chacun des plans de projection, se coupent en deux points, qui déterminent la droite intersection des deux premiers plans.

Soient 1° (pl. 2, fig. 1) LM, Mn, les traces sur les plans de projection d'un plan donné (L, M, n), et LO, On les traces d'un second plan aussi donné (L, O, n); ces traces se coupent sur le plan horizontal au point L, et sur le plan vertical au point n; la droite qui joint ces deux points est l'intersection des deux plans donnés. Mais le point n a pour projection horizontale le point N de la droite XY, intersection des deux plans de projection; le point L a pour projection verticale le point l de la même droite : donc LN, ln sont les deux projections de l'intersection des deux plans donnés.

2° On construira la parallèle à deux plans, qui passe par un point donné, en menant par ce point une parallèle à l'intersection des deux plans; ayant trouvé cette intersection, on lui mènera une parallèle, par le procédé indiqué art. 11, deuxième problème.

Sixième problème. — Une droite et un plan étant donnés, trouver les projections du point où la droite rencontre le plan? (Pl. 2, fig. 2 et 3.)

17. La solution la plus générale de ce problème consiste à mener par la droite donnée un plan quelconque, qui coupe le plan donné suivant une droite; l'intersection de cette droite et de la droite donnée est le point demandé. Le plan mené par la droite n'étant pas déterminé, on peut le supposer perpendiculaire à l'un ou l'autre des plans de projection; la fig. 2, pl. 2, est construite dans cette hypothèse.

Explication de la fig. 2, pl. 2. Soient LM, Mn les traces d'un plan donné, qui se coupent au point M de la commune intersection XY des deux plans de projection. OL et sp étant les projections d'une droite donnée, on conçoit par ces droites deux plans, l'un LOn perpendiculaire au plan horizontal, qui coupe le plan vertical suivant une droite On perpendiculaire à XY; l'autre psS qui coupe le plan horizontal suivant Ss perpendiculaire à XY; or ces plans, et le plan donné (LM, Mn) se coupent suivant deux droites qui passent l'une par le point L du plan horizontal et par le point n du plan ver-

tical, l'autre par le point S du plan horizontal et par le point p du plan vertical; donc ces droites ont pour projections (art. 16) la première OL, nl , la seconde ps, PS .

Mais lorsque deux droites se coupent dans l'espace, leur point d'intersection a pour projections les points de rencontre des projections des droites; donc chacune des deux droites (OL, nl) , (PS, ps) coupe la droite donnée (OL, ps) en un point (I, i) , qui est aussi l'intersection de cette droite et du plan donné. Les deux points I, i , projections d'un même point de l'espace, sont situés sur une droite Ii perpendiculaire à la commune intersection XY .

La solution suivante est plus générale.

18. *Explication de la fig. 3, pl. 2.* Soient XY l'intersection des plans de projection, et LM, Mn les traces du plan donné, la droite donnée (OL, ps) coupe les plans de projection (art. 10) aux points H et K ; d'où il suit que tout plan mené par cette droite coupera les plans de projection suivant deux droites qui passeront par les mêmes points H et K . Menant par le point H une droite quelconque RHT , qui coupe la droite XY au point T , et par les points T et K la droite KTn , le plan qui a pour traces les droites RT, Tn , coupera le plan donné (L, M, n) suivant la droite (RN, rn) (art. 16); or cette droite coupe la droite donnée (OL, ps) au point (I, i) ; donc ce point est l'intersection du plan et de la droite donnés.

On aurait pu mener par le point K une droite quelconque KTn , qui aurait déterminé la seconde trace THR d'un plan RTn qui passerait par la droite donnée, et couperait le plan donné suivant la droite (RN, rn) .

Cette solution et celle du deuxième problème page 7, comprennent toutes les opérations graphiques de la géométrie descriptive.

Propositions relatives aux plans et aux droites qui se coupent à angle droit.

19. Une droite perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à toutes les droites qu'on peut mener par son pied dans ce plan.

Un plan perpendiculaire à une droite, est perpendiculaire à tous les plans qui passent par cette droite. Deux plans sont perpendiculaires entre eux, lorsque l'un d'eux passe par une droite perpendiculaire à l'autre.

Considérant la droite intersection de deux plans perpendiculaires entre eux, l'un de ces plans est perpendiculaire aux parallèles menées dans l'autre plan perpendiculairement à leur intersection commune.

D'où il suit qu'un plan perpendiculaire à deux autres plans inclinés l'un à l'égard de l'autre, est nécessairement perpendiculaire à deux systèmes de droites menées sur ces derniers plans; ce qui n'est possible que parce que

les droites des deux systèmes sont parallèles entre elles, et parallèles à l'intersection des deux plans.

L'angle compris entre deux plans inclinés l'un à l'égard de l'autre, se nomme *angle dièdre*. Il est égal à l'angle de deux droites menées dans ces plans perpendiculairement à leur intersection commune, et par un point quelconque de cette intersection.

20. Une droite étant perpendiculaire à un plan, on suppose 1° que la droite est projetée sur deux plans rectangulaires; 2° que le plan perpendiculaire à la droite est donné par ses traces sur les plans de projection; dans cette hypothèse, *les projections de la droite sont perpendiculaires aux traces du plan*.

Pour le démontrer, considérons d'abord le cas particulier où la droite est donnée sur l'un des plans de projection, par exemple, sur le plan horizontal.

Il est évident qu'un plan perpendiculaire à cette droite horizontale, sera vertical, et que sa trace sur le plan horizontal coupera à angle droit la droite donnée, qui ne diffère pas de sa projection horizontale.

La trace du plan perpendiculaire à la droite horizontale, sur le plan vertical de projection, sera une verticale; la projection verticale de cette droite sera une horizontale parallèle à l'intersection des deux plans de projection; donc la trace sur le plan vertical et la projection verticale de la droite horizontale donnée, seront perpendiculaires entre elles.

Passons maintenant au cas général, celui où la droite est donnée par ses deux projections, et le plan perpendiculaire à la droite par ses deux traces sur les plans de projection.

21. Soit D une droite de l'espace qui a pour projections horizontale et verticale les droites d et d' . Nommons t et t' les traces horizontale et verticale d'un plan P perpendiculaire à la droite D . Il s'agit de démontrer que les couples de droites (d, t) , (d', t') forment deux angles droits, le premier sur le plan horizontal de projection, et le second sur le plan vertical.

Soit P' le plan par lequel on projette la droite D sur le plan horizontal. Puisqu'il est perpendiculaire au plan horizontal et au plan P , il est aussi perpendiculaire à leur intersection commune t (art. 19). Réciproquement cette droite t est perpendiculaire au plan P' et à toutes les droites du plan P' qui passent par son pied sur ce plan. Mais l'une de ces droites est l'horizontale d ; donc les droites d et t sont perpendiculaires entre elles.

De même, soit P'' le plan par lequel on projette en d' la droite D sur le plan vertical de projection. Puisqu'il est perpendiculaire à ce plan vertical et au plan P , il est aussi perpendiculaire à leur intersection commune t' . Réciproquement la droite t' est perpendiculaire au plan P'' et à toutes les droites

du plan P' qui passent par son pied sur ce plan. Mais l'une de ces droites est la projection verticale d' de la droite D ; donc les droites d' et t' sont perpendiculaires entre elles.

La proposition réciproque est encore vraie, c'est-à-dire que si les deux projections d et d' de la droite D sont perpendiculaires aux traces t et t' d'un plan P , ce plan est perpendiculaire à la droite. En effet, concevons par chaque projection de la droite D un plan perpendiculaire au plan sur lequel elle est projetée, on aura deux plans dont la droite D est l'intersection commune. Mais chacun de ces plans est perpendiculaire au plan P donné par ses traces; donc leur commune intersection est aussi perpendiculaire à ce plan P .

Septième problème. — Par un point donné mener une perpendiculaire à un plan donné, et construire les projections du point de rencontre de la droite et du plan ? (Pl. 3, fig. 1.)

22. *Solution.* Soient LM, Mn (pl. 3, fig. 1) les deux traces du plan donné, qui se coupent au point M de l'intersection XY des deux plans de projection. Le point donné ayant pour projections A et a , on abaissera les perpendiculaires AI, ai sur les traces ML, Mn ; ces perpendiculaires seront (art. 21) les deux projections de la perpendiculaire demandée.

On trouvera le pied (I, i) de la perpendiculaire, c'est-à-dire le point où la perpendiculaire au plan rencontre ce plan, par la construction (art. 17) du sixième problème (fig. 2, pt. 2). La longueur de la perpendiculaire comprise entre son pied (I, i) et le point donné (A, a) , est déterminée (art. 11) par ses deux projections AI, ai .

Si l'on proposait de mener par une droite donnée un plan perpendiculaire à un autre plan donné de position, on abaisserait par un point quelconque de la droite une perpendiculaire sur le plan donné; le plan conduit (art. 15) par cette perpendiculaire et par la droite donnée, serait le plan demandé; car deux plans sont perpendiculaires entre eux, lorsque l'un d'eux passe par une perpendiculaire à l'autre (art. 19).

Huitième problème. — Par un point donné, mener une droite perpendiculaire à une droite donnée, et construire la projection du point de rencontre des deux droites ? (Pl. 3, fig. 2.)

23. *Solution.* On mène par le point donné un plan perpendiculaire à la droite donnée, qui coupe cette droite en un point; la droite qui joint ce point d'intersection et le point donné est la perpendiculaire demandée.

Explication de la fig. 2, pl. 3. Soient A et a les deux projections du point donné; BC , bc les deux projections de la droite donnée. Un plan perpendiculaire à cette droite aura (art. 21) pour traces sur les plans de projection deux droites, telles que $L'M$, $M'n'$, perpendiculaires aux projections BC , bc de la droite donnée. Menant (art. 13) par le point (A, a) un plan parallèle au plan $L'M'n'$, il aura pour traces sur les plans de projection, les droites LM et Mn , et il rencontrera la droite (BC, bc) au point (I, i) , que l'on trouvera par la construction (art. 17) du sixième problème (fig. 2, pl. 2). Tirant les droites AI , ai , on aura les projections de la perpendiculaire abaissée du point donné (A, a) sur la droite donnée (BC, bc) .

Cette solution comprend celle du problème suivant :

Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite donnée, et construire les projections du point de rencontre du plan et de la droite.

24. On pourrait encore résoudre la question précédente (8^e), en menant par le point et par la droite donnée un plan; les traces horizontale et verticale de ce plan seraient déterminées. On le ferait tourner autour de l'une de ces traces, par exemple, autour de l'horizontale, et on ramènerait sur le plan horizontal le point et la droite donnés. On abaisserait du point une perpendiculaire sur la droite, comme si le point et la droite étaient situés sur le plan horizontal; enfin on déterminerait les projections horizontale et verticale du pied de la perpendiculaire, en considérant le point et la droite comme situés sur un plan donné par ses traces.

Ces diverses constructions donneront une seconde solution graphique du problème proposé; le lecteur attendra, pour effectuer les opérations indiquées pour cette solution, qu'on ait expliqué les articles 28—32.

Neuvième problème. — Un plan étant donné par ses traces, trouver les angles qu'il forme avec les plans de projection ? (Pl. 3, fig. 3.)

25. *Solution.* L'angle de deux plans est égal à l'angle de deux droites D , D' menées dans ces plans par un point de leur intersection commune, perpendiculairement à cette intersection (art. 19). Dans le cas proposé, l'une de ces droites, D par exemple, sera menée sur le plan horizontal de projection, perpendiculairement à la trace donnée sur ce plan. Le plan mené par cette droite D , perpendiculairement au plan horizontal de projection, coupera le second plan de projection et le plan donné, suivant deux autres droites qui formeront avec la première D , un triangle rectangle. Construisant ce triangle au moyen des deux côtés adjacents à l'angle droit, l'hypothénuse fera, avec le côté situé sur le premier plan de projection, l'angle demandé.

26. *Explication de la fig. 3, pl. 3.* Soient AB et Bc les traces d'un plan donné sur les plans de projection. Par un point D de la trace horizontale AB , on élève la perpendiculaire DE , que l'on regarde comme la trace d'un plan vertical qui coupe le plan vertical de projection, suivant la droite Ef perpendiculaire à l'intersection XY des plans de projection : or cette droite coupe la trace verticale Bc en f ; donc le plan vertical DE coupe le plan donné suivant l'hypothénuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés les droites DE , Ef . Ramenant ED en ED' , l'hypothénuse Df du triangle rectangle EDf fera avec le côté ED' , un angle EDf égal à l'angle du plan horizontal et du plan qui est donné par ses traces AB , Bc .

On construira de la même manière l'angle du plan vertical et du plan donné. Par un point g de la trace Bc on élève la perpendiculaire gh à cette trace, et on la considère comme la trace verticale d'un plan perpendiculaire au plan vertical de projection. La trace horizontale de ce plan sera la droite hK perpendiculaire à XY ; cette droite coupe la trace horizontale AB au point K ; d'où il suit que le plan ghK rencontre le plan donné suivant l'hypothénuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés les droites gh , hK . Ramenant hg en hg' , on aura le triangle $g'hK$, dans lequel l'angle g' est égal à l'angle du plan vertical de projection et du plan donné ABc .

En élevant les deux perpendiculaires Ef' , hK' aux droites ED , gh , et les faisant égales respectivement à Ef et hK , on obtiendrait deux triangles rectangles EDf' , ghK' respectivement égaux aux triangles EDf , $g'hK$, dont les angles D et g mesurent les inclinaisons du plan donné (AB , Bc) par rapport aux plans horizontal et vertical de projection.

Dixième problème. — Deux droites qui se coupent étant données, construire l'angle qu'elles forment entre elles ? (Pl. 4, fig. 1 et 2.)

27. *Solution.* On mène par les deux droites données un plan qui coupe l'un des plans de projection, l'horizontal, par exemple, suivant une droite. Cette droite et les deux droites données forment un triangle que l'on construit en faisant tourner le plan de ce triangle autour de sa trace sur le plan horizontal, jusqu'à ce qu'il soit abattu sur ce plan. Le point d'intersection des deux droites données décrit, en tournant autour de la même trace, un cercle qui coupe le plan horizontal en un point; joignant par des droites ce point et ceux où les deux droites données rencontrent le plan horizontal, on a l'angle de ces deux droites.

28. *Explication des fig. 1 et 2, pl. 4.* La fig. 1 fait voir comment on dé-

termine la position d'un point d'un plan, par rapport aux traces de ce plan sur les plans de projection.

Soient LM et Mn les traces d'un plan qui se coupent au point M de l'intersection des deux plans de projection. Un point du plan étant donné en projection horizontale, soit A cette projection; on trouvera la projection verticale en menant la parallèle AF à la trace horizontale LM ; considérant cette parallèle comme la projection d'une horizontale du plan LMn , elle coupe le plan vertical au point f de la trace Mn ; elle a pour projection verticale la parallèle fa à XY . Le point du plan LMn , dont A est la projection horizontale, a pour projection verticale le point de rencontre a des deux droites Aa, fa , l'une perpendiculaire, et l'autre parallèle à l'intersection XY des deux plans de projection.

Si l'on eût donné la projection verticale a du point (A, a) du plan LMn , on aurait construit la projection horizontale A , en menant les quatre droites af, fF, FA et aA ; les deux dernières se coupent au point A . On obtiendrait encore ce point A , en menant la parallèle ak à Mn , et en élevant la perpendiculaire kK à XY , qui coupe la trace ML au point K ; la parallèle KA à XY , et la droite aA , qui est perpendiculaire à cette intersection des deux plans de projection, se rencontrent au point A . Si l'on donnait le point A , on mènerait les quatre droites AK, Kk, ka, Aa ; les deux dernières se couperaient au point a ; d'où l'on voit qu'un plan étant donné par ses traces, l'une des deux projections d'un point de ce plan détermine l'autre projection.

29. Le point d'un plan étant connu par ses projections, on demande les distances de ce point aux traces du plan? Soit (A, a) le point du plan LMn (pl. 4, fig. 1). Ayant abaissé du point A la perpendiculaire AL sur ML , on regarde cette droite AL comme la trace d'un plan vertical qui coupe le plan LMn suivant une droite. La portion de cette droite, comprise entre le point (A, a) et la trace LM , mesure la distance de ce point à la trace; donc si l'on construit le triangle rectangle aDO' , qui a pour côtés les droites aD et $DO' = AO = AL$, l'hypothénuse aO' sera la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (A, a) sur la trace LM . Portant cette longueur aO' de L en A' sur le prolongement de AL , A' sera le point où le cercle décrit par le point (A, a) autour de la trace horizontale LM , coupe le plan horizontal.

30. Ayant mené la parallèle AK à XY , qui coupe la trace LM au point K , et joignant les points K et A' par la droite $A'K$, on aura un triangle rectangle $A'LK$, dans lequel l'hypothénuse $A'K$ est égale à la droite ak parallèle à la trace Mn . En effet, la droite $(AK, a'k)$, parallèle à la trace verticale Mn du plan LMn , et située dans ce plan, a pour longueur sa projection verticale ak ; en même temps que le point (A, a) décrit un cercle autour de la trace LM , la droite $(AK, a'k)$ décrit un cône droit dont le cercle est la base, et

lorsque le point (A, a) est en A' sur le plan horizontal, cette droite s'applique sur le même plan en KA' ; sa longueur étant constante, on a : $KA' \equiv ka$.

Supposons maintenant que le plan LMa tourne autour de sa trace Ma comme charnière, le point (A, a) décrira un cercle dont le plan coupe le plan vertical suivant la droite ana'' , perpendiculaire à Ma . On construira le point A'' où ce cercle coupe le plan vertical, en décrivant du point f comme centre, avec un rayon fA'' égal à FA , un arc qui coupe la droite ana'' au point A'' . En effet, lorsque le plan LMa tourne autour de sa trace verticale Ma comme charnière, la droite horizontale (AF, af) de ce plan, parallèle à sa trace horizontale LM , décrit un cône droit qui a pour base le cercle que le point (A, a) décrit autour de Ma ; donc le plan (LMa) , qu'on suppose abattu sur le plan vertical, coupe le cône suivant une arête fA'' , qui est de même longueur que la droite FA , projection horizontale de l'horizontale (FA, fa) ; d'où il suit que na'' est la distance du point (A, a) à la trace Ma du plan LMa . Cette distance est encore l'hypothénuse d'un triangle rectangle en n , lequel aurait an pour premier côté, et pour second côté une droite égale à AD ; portant AD de n en D' , on a $aD' \equiv A'n$.

31. Le point A' ou A'' du plan (LM, Ma) étant donné sur les droites AA' , $A''a$, respectivement perpendiculaires aux traces LM , Ma , on pourrait proposer de construire les projections horizontale et verticale A, a de ce point; cette question est l'inverse de la précédente. Un plan quelconque (PQR , *fig. 1*), vertical et perpendiculaire à la trace horizontale LM , contient l'angle que le plan (LMa) fait avec le plan horizontal. On construit cet angle en décrivant (art. 25) du point Q comme centre avec le rayon QP , l'arc PP' qui coupe l'intersection XY des plans de projection au point P' . Ce point et celui R où les traces verticales QR , Ma se rencontrent, déterminent la droite RP' , hypothénuse du triangle rectangle $RP'Q$, dont l'angle P' , opposé au côté RQ , est égal à l'angle du plan horizontal de projection et du plan donné (LM, Ma) . Le plan vertical AA' qui passe par le point A' étant perpendiculaire à la trace horizontale LM , et par conséquent parallèle au plan vertical PQ , il contient aussi l'angle du plan horizontal de projection et du plan donné (LMa) ; d'où il suit que la droite $A'L$ de ce plan est située sur une droite inclinée à l'horizon de l'angle connu $QP'R$, et que sa projection a pour longueur le côté $P'L'$ du triangle rectangle $P'L'a'$, dont l'hypothénuse $P'a'$ est égale à la distance $A'L$ du point donné A' à la trace horizontale LM . Portant le côté $P'L'$ de L en A sur la perpendiculaire AA' à LM , ce point A est la projection horizontale du point A' donné sur le plan (LMa) qu'on suppose abattu sur le plan horizontal. De cette première projection A , on déduirait la seconde a , en menant comme précédemment, les droites AF, fa , et la perpendiculaire Aa à XY .

32. Les traces LM , Mn du plan donné (LMn) font entre elles un angle TMF , que l'on construit en faisant tourner un point quelconque f de la trace verticale Mn , autour de la trace horizontale LM comme charnière. Ce point f , abattu sur le plan horizontal, se trouve sur la perpendiculaire FF' à la charnière LM , à une distance TF' de cette charnière, égale à l'hypothénuse du triangle rectangle Fft , dans lequel le côté Ft est égal à la droite FT .

Menant par un point donné A' du plan (LMn), une droite quelconque VS , qui coupe les traces de ce plan aux points V et S , on aura les projections horizontale et verticale de cette droite, ou les droites Vs' et $V's$, en remarquant que le point V est sur le plan horizontal de projection; et le point S sur la trace verticale Mn en un point s tel qu'on a $Ms = MS$.

La perpendiculaire $A'A$ à la trace horizontale LM contient la projection horizontale du point donné A' ; cette projection étant aussi sur la droite Vs' , elle est déterminée par l'intersection de ces deux droites $A'A$, Vs' . La seconde projection a du point donné A' est l'intersection de la droite $V's$ et de la perpendiculaire ADa sur la droite XY .

Les constructions précédentes relatives à un plan, à un point et une droite contenus dans ce plan, servent de préliminaires à la seconde solution du huitième problème; qu'on a seulement indiquée page 14 (art. 24), et à l'explication suivante des *fig. 2, 3 et 4. (Pl. 4.)*

33. *Explication de la figure 2, pl. 4, relative à la solution du dixième problème (art. 27).*

Soient AB , AC (*fig. 2*) les projections horizontales des deux droites données, et ab , ac leurs projections verticales; ces deux droites se coupent au point (A, a) . La droite (AB, ab) prolongée rencontre les plans de projection aux points B et n ; l'autre droite donnée coupe le plan horizontal au point C ; d'où il suit que le plan mené par les deux droites coupe le plan horizontal suivant BCM , le plan vertical suivant Mn , et que l'angle des deux droites a pour sommet le point (A, a) de ce plan. Faisant tourner ce sommet autour de la trace horizontale BCM comme charnière, il décrit un cercle qui coupe le plan horizontal (art. 29) en un point A' de la perpendiculaire ALA' , abaissée du point A sur la trace BC . Pour déterminer le point A' , on construit le triangle rectangle aDl avec le côté Dl égal à Al ou AL ; portant l'hypothénuse al de L en A' , et joignant par des droites le point A' et les points B et C , on a le triangle BAC dans lequel l'angle A' est égal à l'angle des deux droites données.

On obtiendrait le même résultat en faisant tourner le plan de l'angle $(BCMn)$ autour de sa trace verticale Mn ; la construction est indiquée sur la figure, sans explication.

Onzième problème. — Deux plans étant donnés, construire l'angle qu'ils forment entre eux? (Pl. 4, fig. 3.)

34. Solution. On coupe les deux plans donnés par un troisième plan perpendiculaire à l'intersection commune des deux premiers. Les traces de ce troisième plan sur le plan horizontal et sur les deux plans donnés, forment un triangle dont le côté horizontal est opposé à l'angle demandé.

Soient (fig. 3, pl. 4) LM, LO les traces horizontales et Mn, On les traces verticales des deux plans donnés; ces plans se coupent (art. 16) suivant la droite (LN, ln). Menant à volonté une droite ADB perpendiculaire à la projection LN de l'intersection des deux plans donnés, cette droite peut être considérée comme la trace horizontale d'un plan perpendiculaire à l'intersection (LN, ln). Si l'on connaissait le point où ce plan coupe la droite (LN, ln), on joindrait par deux droites ce point et les points A, B dans lesquels la trace ADB rencontre les traces LM, LO; l'angle de ces deux droites serait l'angle demandé. Pour trouver le sommet de cet angle, on conçoit par la droite LN un plan vertical LNn, et dans ce plan, l'angle n'LN que la droite (LN, ln) fait avec sa projection horizontale LN. On construit cet angle, en élevant la perpendiculaire Nn' à NL, et en faisant cette perpendiculaire égale à la verticale Nn. Maintenant, si du point D on abaisse la perpendiculaire DE sur l'hypothénuse Ln' du triangle rectangle LNn', le point E sera sur le plan vertical LN le sommet de l'angle demandé.

Le plan de cet angle est déterminé par les deux droites AB, DE, situées l'une sur le plan horizontal de projection, et l'autre sur le plan vertical LN. Faisant tourner ce plan de l'angle autour de sa trace horizontale AB, la circonférence du rayon DE, décrite par le point E de ce plan, coupe le plan horizontal, en un point F de la droite LDN, tel que la partie DF de cette droite soit égale à DE. Menant les droites FA, FB, l'angle AFB de ces droites est la mesure de l'angle des deux plans donnés LMn, LOm.

Au lieu d'élever la perpendiculaire Nn' à LN, on décrit du point N comme centre, avec les droites NL, ND pour rayons, les arcs LL', DD' qui coupent l'intersection XY des plans de projection aux points L', D'; tirant la droite nL', et la perpendiculaire D'E' à cette droite, on forme un triangle D'E'L', égal au triangle DEL: les côtés DE, D'E' de ces triangles sont égaux; d'où il suit qu'on aura le point F sommet de l'angle demandé AFB, en faisant DF égal à D'E'.

On pourrait encore construire l'angle de deux plans donnés, en imaginant, par un point quelconque de l'espace, deux droites respectivement perpen-

diculaires à ces plans; l'angle de ces deux droites serait le supplément ou l'égal de l'angle demandé. En effet, le plan mené par les deux perpendiculaires coupe les plans donnés suivant deux autres droites perpendiculaires à leur intersection commune: or ces quatre droites forment un quadrilatère qui a deux angles droits; donc les deux autres angles sont suppléments l'un de l'autre; d'où il suit que l'angle des deux perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de l'espace sur deux plans donnés, mesure l'angle de ces plans ou le supplément de cet angle.

Douzième problème. — Construire l'angle formé par une droite et par un plan, donnés de position dans l'espace ? (Pl. 4, fig. 4.)

35. *Solution.* Par un point de la droite donnée, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné; l'angle de la droite et de la perpendiculaire est le complément de l'angle demandé.

Explication de la fig. 4, pl. 4. Soient AB, ab les projections de la droite donnée; LM, Mm les traces du plan donné. Par un point (A, a) de la droite donnée, on abaisse une perpendiculaire (AC, ac) sur le plan donné; l'angle des deux droites $(AB, ab), (AC, ac)$ est le complément de l'angle demandé. Pour construire cet angle, on conçoit par ces deux côtés un plan; la trace de ce plan sur le plan horizontal de projection, passe par les points B, C , dans lesquels les droites $(AB, ab), (AC, ac)$ coupent ce même plan de projection. Faisant tourner le plan de l'angle autour de sa trace horizontale BC comme charnière, le sommet de l'angle décrit un cercle situé dans le plan vertical AD , perpendiculaire à BC . Le rayon de ce cercle est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, qui a pour côtés l'horizontale AD , et la verticale aa' qui mesure la distance du sommet (A, a) de l'angle au plan horizontal de projection. Soit donc $a'E' = AE = AD$, on aura le triangle rectangle $aE'a'$, dont l'hypothénuse aE' est la distance du sommet de l'angle cherché à la trace BCD . Portant cette distance sur la perpendiculaire AD à BC , de D en A' , et tirant les droites $A'C, A'B$, on aura sur le plan horizontal l'angle $BA'C$, que la droite donnée (AB, ab) et la perpendiculaire (AC, ac) au plan donné, comprennent entre elles. Élevant la perpendiculaire CP à CA' , l'angle CPA' , complément de $CA'PB$, est égal à l'angle formé par la droite et par le plan donnés de position dans l'espace.

Treizième problème.— Deux droites étant données dans l'espace, construire la droite qui leur est perpendiculaire, et sur laquelle se mesure leur plus courte distance? (Pl. 5, fig. 1) (*).

36. Ayant mené (art. 13) un plan parallèle aux deux droites données, on conçoit par ces droites deux autres plans perpendiculaires au premier (art. 22); l'intersection de ces deux derniers plans est une droite perpendiculaire aux deux droites données; elle coupe ces droites en deux points, et la droite qui joint ces points est la plus courte distance des droites données.

Explication de la fig. 1, pl. 5. Soient AB , CD les projections horizontales des deux droites données; ab , cd leurs projections verticales. Par le point (B, b) où la première droite (AB , ab) coupe le plan vertical, on mène une parallèle (BE , be) à la seconde droite donnée (CD , cd); cette parallèle rencontre le plan horizontal au point E ; la droite donnée (AB , ab) le rencontre au point A ; la droite AEF , qui joint les points A et E , est la trace horizontale d'un plan mené par la première droite donnée, parallèlement à la seconde. La trace verticale de ce plan est Fb ; le point F de cette trace est sur la commune intersection XY des plans de projection, et sur le prolongement de la droite AE . Le plan (AFb) étant déterminé par ses deux traces AF , Fb , on projette la seconde droite donnée sur ce plan, et on remarque que la droite et sa projection sont parallèles, parce que le plan (AFb) sur lequel on projette est, par hypothèse, parallèle à la droite projetée (art. 14).

Par le point C , où la seconde droite donnée (CD , cd) rencontre le plan horizontal, on abaisse la perpendiculaire (CG , cg) sur le plan (AFb), et on construit (art. 17) le point (I, i) où cette perpendiculaire rencontre le plan. Menant par ce point la parallèle (IN , in) à la droite (CD , cd), cette parallèle est la projection de la droite (CD , cd) sur le plan (AFb).

(*) Ce problème est un cas particulier de celui-ci : Étant données deux droites, et les angles qu'elles forment avec une troisième droite qui les coupe, déterminer la direction et la position de cette troisième droite?

Pour le résoudre, on mène par un point quelconque de l'espace deux droites respectivement parallèles aux deux droites données, et on regarde ce point comme le sommet commun des deux cônes droits, qui ont pour axes les parallèles, et dont les côtés font avec ces parallèles, des angles qui sont égaux à ceux que les droites données font avec la troisième droite cherchée. Cette dernière droite est parallèle à l'une ou à l'autre des deux droites suivant lesquelles les cônes se coupent; sa direction est donc connue. Pour trouver sa position sur les droites données, on mène par chacune de ces droites un plan parallèle à la droite dont on a déterminé la direction; les deux plans parallèles à cette droite se coupent, et la droite d'intersection satisfait aux conditions du problème proposé.

Deux droites situées sur le même plan se rencontrent : or, les droites (AB, ab) et (IN, in) sont sur le même plan (AFb) ; donc elles se coupent au point (N, n) déterminé par les intersections de leurs projections horizontales et verticales. Ce point étant trouvé, le problème est résolu : en effet, un plan mené par la seconde droite, perpendiculairement au plan (AFb) qui est parallèle aux deux droites données, coupe la première droite au point connu (N, n) ; d'où il suit que la perpendiculaire au plan (AFb) , élevée par ce point, est perpendiculaire aux deux droites données. Mais cette perpendiculaire a pour projections horizontale et verticale les droites NQ, nr respectivement perpendiculaires aux traces AF, Fb du plan (AFb) ; donc la portion (NP, np) de cette perpendiculaire, comprise entre les deux droites données, est la plus courte distance de ces deux droites. Cette construction détermine la direction et la grandeur absolue de la plus courte distance des deux droites; si l'on ne demandait que la grandeur absolue, la construction deviendrait beaucoup plus simple. En effet, après avoir déterminé les traces AEF, Fb du plan (AFb) mené par la première droite donnée parallèlement à la seconde, on aurait pu mener par le point (C, c) de la seconde droite un plan vertical CG , perpendiculaire à la trace horizontale AEF du plan AFb . Ce plan vertical coupe le plan AFb suivant une droite (GH, gh) qui a pour longueur l'hypothénuse d'un triangle rectangle GHI , dont le côté HI' est égal à Hh . Abaisant du point C la perpendiculaire CI' sur l'hypothénuse GH , cette hypothénuse est la longueur de la plus courte distance des deux droites.

37. Ajoutons à ce qui précède la construction suivante : Menons la perpendiculaire $I'I$ sur GCH , et la perpendiculaire Ii sur l'intersection XY des plans de projection; cette droite Ii coupe la droite gh au point i , ce qui détermine les deux projections du point (I, i) par lequel on mène la parallèle (IN, in) à la seconde droite donnée (CD, cd) . Cette parallèle rencontre la première droite donnée au point (N, n) qui détermine la perpendiculaire (NP, np) aux deux droites données. Cette seconde construction du point (N, n) sert de vérification à la précédente, et d'ailleurs, elle donne directement la plus courte distance des deux droites.

38. Deux droites qui ne se coupent pas, ne forment pas un angle; cependant on prend quelquefois pour l'angle de deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, celui qui est formé par les projections de ces droites sur un plan qui leur est parallèle, et dont le sommet est sur la perpendiculaire aux deux droites; ce second angle est égal à celui de deux parallèles aux droites de l'espace, menées par un point pris arbitrairement; il est aussi égal à l'angle des deux plans conduits par les droites de l'espace et par la droite qui leur est perpendiculaire.

39. *Trois droites quelconques étant données dans l'espace de manière qu'elles ne se rencontrent pas, et qu'elles ne soient point parallèles à un même plan, il n'existe qu'un seul parallépipède dont trois arêtes soient dirigées suivant les trois droites données.*

Démonstration. Nommons A, B, C les trois droites de l'espace qui ne se rencontrent pas : on sait (art. 14) que la direction d'un plan est déterminée par la condition d'être parallèle à deux droites; d'où il suit, 1° que par un point quelconque de l'espace, on peut mener trois plans respectivement parallèles aux couples de droites $(A, B), (B, C), (C, A)$; 2° que par l'une quelconque des trois droites A, B, C , A par exemple, on peut mener deux plans, l'un parallèle à la droite B , et l'autre à la droite C ; ce qui détermine six plans parallèles deux à deux, et par conséquent le parallépipède dont les arêtes sont dirigées suivant les droites intersections de ces plans : or de ces six plans, trois sont par hypothèse conduits par les droites données A, B, C ; donc ces droites sont nécessairement dirigées suivant trois arêtes d'un parallépipède unique, capable des trois droites données A, B, C .

Construction géométrique du parallépipède capable de trois droites $AB, B'C', CA'$ qui ne se rencontrent pas. (Pl. V, fig. 2.)

40. On mène, 1° par la première droite AB (fig. 2) un plan parallèle à la seconde droite $B'C'$; ce plan est coupé par la troisième droite CA' , au point C par lequel on mène la parallèle CD à AB , et la parallèle CB à $B'C'$.

2° On conduit par la seconde droite donnée $B'C'$ un plan parallèle à la troisième droite CA' ; ce plan coupe le plan des trois droites AB, BC, CD , suivant la droite AD , qui complète le parallélogramme $ABCD$, face du parallépipède capable des trois droites données.

Pour achever ce solide, on mènera les trois parallèles BD', AC', DE' à la droite donnée $A'C'$; les deux dernières couperont la droite donnée $B'C'$, aux points B', C' , par lesquels on tirera les parallèles $B'A', C'D'$ à la droite donnée AB ; la première de ces parallèles rencontrera la droite CA' , au point A' ; par ce point, on mènera la parallèle $A'D'$ à $B'C'$, et les six faces du parallépipède seront construites. Les trois arêtes de ce solide, dirigées suivant les droites données, ont pour longueurs les droites déterminées $AB, B'C', A'C'$. Les quatre diagonales AA', BB', CC', DD' se coupent au centre I du parallépipède, par lequel on a mené les droites $ab, b'c', a'c'$ respectivement parallèles aux arêtes $AB, B'C', A'C'$.

41. Le parallépipède capable des trois droites données AB , $B'C$, $A'C$ étant construit, on remarquera que non-seulement trois des douze arêtes de ce solide sont dirigées suivant les droites données, mais que trois autres droites ont ce caractère particulier, que chacune d'elles est en même temps parallèle à l'une des trois droites données, et sécante ou transversale des deux autres. Les droites données A , B , C étant dirigées suivant les arêtes AB , $B'C$, CA , du parallépipède, les trois autres A' , B' , C' dirigées suivant les arêtes $A'B$, BC , CA sont respectivement parallèles à l'une des deux premières et sécante des deux autres.

Problème. — Mener par un point donné P de la droite $A'C$ (fig. 3), la transversale l'un des deux autres droites AB , $B'C$, arêtes du parallépipède $ABCA'B'C'$.

42. *Solution.* Le plan mené par le point P (fig. 3) et par la droite $B'C$ coupe le plan $ABCD$ suivant la droite nl parallèle à AD ou BC ; or cette droite nl coupe la droite AB au point l ; donc la droite lP qui joint les points l et P sera dans le plan $nlB'C$, qui contient la droite $B'C$; donc elle rencontrera cette dernière droite en un point m , et sera une transversale des trois arêtes AB , $A'C$, $B'C$ du parallépipède. La droite symétrique de cette transversale coupe les trois arêtes $A'B$, AC , BC aux points l' , P' , m' , qu'on détermine en menant par le centre I , les droites Il' , lP , $P'P$, mIm' .

Quelle que soit la transversale lPm des trois premières arêtes AB , $B'C$, $A'C$ du parallépipède capable de ces trois droites, elle a pour transversale symétrique une parallèle $l'P'm'$, et le plan de ces deux transversales passe par le centre I du parallépipède, dont elles sont également éloignées. Désignant les premières arêtes par les lettres A , B , C ; leurs parallèles symétriques par A' , B' , C' ; par T une transversale quelconque des droites A , B , C ; par S la symétrique de T , qui est une transversale des droites A' , B' , C' , on a deux systèmes de transversales T , T' , T'' , ..., S , S' , S'' , ..., telles que l'une quelconque du premier système, T , par exemple, coupe toutes les droites S , S' , S'' , ... du second système, et réciproquement une droite quelconque de ce second système coupe toutes les droites T , T' , T'' , ... du premier. Cette proposition sera démontrée dans le paragraphe du chapitre 3, relatif à la surface dite *hyperboloïde à une nappe*.

Les constructions graphiques indiquées sur la fig. 3 s'exécuteraient par la méthode des projections sur les plans horizontal et vertical, comme pour les problèmes précédents relatifs à la ligne droite et au plan.

CHAPITRE II.

§ 1^{er}. DES TANGENTES AUX COURBES, ET DES PLANS TANGENS AUX SURFACES COURBES.

43. ON a vu (art. 6) qu'une courbe est la limite d'une infinité de polygones qui auraient pour côtés des cordes successives de la courbe. Lorsque l'un quelconque de ces polygones se confond avec la courbe, ses côtés deviennent les élémens de cette courbe, et leurs prolongemens en déterminent les *tangentes*.

On peut encore considérer une ligne courbe comme le lieu géométrique d'un point mobile soumis à une ou plusieurs forces qui sont constantes, ou qui varient pour chaque position du point; la loi du mouvement détermine la nature de la courbe. En supposant que toutes les forces constantes ou variables qui agissent sur le point mobile, cessent leur action, le point continuera à se mouvoir suivant une droite qui sera tangente à la courbe.

Les anciens géomètres définissaient la tangente d'une courbe, une droite qui n'a qu'un point commun avec cette courbe, et telle qu'on ne puisse mener aucune autre droite entre elle et la courbe.

De quelque manière qu'on définisse la tangente d'une courbe, que cette courbe soit plane ou à double courbure, *les projections des tangentes de cette courbe sont tangentes aux projections de la courbe*.

44. Une surface étant décomposée en un assez grand nombre de parties pour que chaque partie puisse être considérée comme un élément plan, le plan de cet élément prolongé indéfiniment est un *plan tangent* de la surface. L'élément réduit à un point physique, se nomme *point de contact*; il est la limite des sections planes de la surface parallèles au plan tangent.

Le plan tangent contient les tangentes de toutes les lignes planes ou à double courbure menées sur la surface par le point de contact; deux quelconques de ces tangentes déterminent la direction du plan tangent. La perpendiculaire à ce plan est une *normale* de la surface; en coupant la surface par une suite de plans qui passent par une normale, les sections faites sur la surface par ces plans se nomment *sections normales*.

45. Toute ligne à simple et à double courbure peut être considérée comme résultant ou de l'intersection d'une surface courbe par un plan, ou de l'in-

intersection de deux surfaces courbes. La tangente en un point quelconque de la courbe plane est l'intersection du plan tangent à la surface en ce point, et du plan de la courbe; la tangente en un point quelconque de la courbe à double courbure est la droite intersection des deux plans tangens menés par ce point aux deux surfaces dont la courbe est l'intersection: ces deux propositions sont des conséquences de la définition du plan tangent à une surface courbe.

46. Il y a deux espèces de plans tangens; les uns n'ont de commun avec la surface que le point de contact, et toutes les sections normales qui passent par ce point sont placées du même côté par rapport au plan tangent. Lorsque les sections normales sont placées de côtés différens par rapport au plan tangent (*), ce plan appartient à la seconde espèce; il est en même temps tangent et sécant. Nous donnerons des exemples des deux espèces de plans tangens aux surfaces courbes.

§ II. De la génération des surfaces et de leur définition.

47. Les géomètres expriment la nature d'une surface par une relation entre les trois distances d'un point quelconque de cette surface à trois plans fixes, et cette même relation détermine la position de la surface par rapport à ces plans. En géométrie descriptive, on considère une surface comme le lieu d'une courbe mobile dont la forme constante ou variable est donnée à chaque instant; la loi du mouvement de cette courbe détermine la forme et la position de la surface: on nomme la courbe mobile *la génératrice de la surface*.

En faisant mouvoir une surface d'une forme constante ou variable, l'enveloppe de l'espace qu'elle parcourt est une autre surface qu'on appelle *surface enveloppe*, et qui est le lieu des lignes d'intersections successives de la surface mobile. Chacune de ces lignes, que Monge a nommée *la caractéristique* de la surface enveloppe, peut être considérée comme la génératrice de cette surface. Les quantités qui déterminent une position particulière de la surface mobile, et les dimensions de la surface correspondantes à cette position, se

(*) Monge a démontré cette belle propriété des surfaces courbes, qu'une normale en un point quelconque d'une surface ne peut être rencontrée que par deux autres normales menées à une distance infiniment petite du point de la surface. Les parties de la normale comprises entre la surface et les points où cette normale est coupée par deux autres normales infiniment voisines, se nomment les *rayons de courbure principaux* de la surface. Le plan tangent en un point quelconque d'une surface est de première ou de seconde espèce, selon que les rayons de courbure en ce point sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire.

nomment les *paramètres* de la surface. Les paramètres, constans pour une position déterminée, changent en général de valeurs, lorsque la surface prend les diverses positions assignées par la loi du mouvement. Cependant il y a des cas où les paramètres qui fixent les dimensions de la surface sont invariables.

Une surface est définie, lorsque pour chacun de ses points, on peut assigner la ligne génératrice, constante ou variable de forme, qui passe par ce point; cette génératrice peut être donnée en relief ou par ses projections.

48. Les surfaces qu'on emploie le plus fréquemment dans les arts, sont celles qui ont pour génératrices mobiles le cercle et la ligne droite. Parmi les surfaces qui ont pour génératrice le cercle, on doit distinguer celle qu'on appelle *surface de révolution*, et qui s'exécute sur la machine *outil* connue sous le nom de *tour*.

Il y a deux espèces de surfaces engendrées par une droite : les unes qu'on nomme *surfaces développables*; les autres qu'on appelle *surfaces gauches*, qui ne sont point développables, et que j'ai proposé de nommer *surfaces réglées*, parce qu'on peut appliquer l'arête d'une règle sur les droites de ces surfaces.

Des surfaces de révolution, et en général des surfaces engendrées par un cercle mobile.

49. Lorsqu'un cercle se meut, son centre décrit une courbe; son rayon varie suivant une certaine loi; les intersections successives du plan du cercle forment une surface. L'enveloppe de l'espace qu'un cercle parcourt n'est donc déterminée que lorsqu'on donne ces trois choses : 1^o la loi suivant laquelle le rayon du cercle varie; 2^o la courbe décrite par son centre; 3^o la surface lieu géométrique (*) des intersections successives du plan mobile qui contient le cercle.

Quel que soit le mouvement d'une sphère d'un rayon constant ou variable, l'enveloppe de l'espace qu'elle parcourt est le lieu des cercles intersections successives de la sphère mobile. Si l'on remarque que deux sphères qui se pénètrent, ont pour intersection un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres, on verra facilement que la courbe décrite par le centre d'une sphère mobile, est l'axe curviligne d'un canal dont les sections perpendiculaires à cet axe sont des cercles.

Lorsqu'on substitue à cet axe courbe une ligne droite, la surface *canal*

(*) On entend par *lieu géométrique* d'un point, la ligne ou la surface qui contient ce point; par *lieu géométrique* d'une ligne, la surface qui contient cette ligne. C'est dans ce sens qu'en géométrie, on emploie le mot *lieu*, sans y ajouter *géométrique*.

devient une *surface de révolution*. On appelle ainsi la surface engendrée par une ligne droite ou courbe, plane ou à double courbure, qui tourne autour d'un axe fixe. Un plan mené par cet axe se nomme *plan méridien*; tous les plans méridiens coupent la surface de révolution suivant la même ligne, et on nomme cette ligne *section méridienne*.

Toutes les lignes planes ou à double courbure qu'on peut tracer sur une surface de révolution dont l'axe est donné, engendrent par leur mouvement de rotation autour de cet axe la même surface; ce qui est évident en remarquant que les rayons et la position respective des cercles de la surface ne varient pas.

Quelle que soit la ligne génératrice d'une surface de révolution, toutes les sections perpendiculaires à l'axe de cette surface, sont des cercles qui ont leurs centres sur cet axe.

Toutes les normales d'une surface de révolution passent par son axe; la normale en un point quelconque de la surface, est aussi normale à la section méridienne dont le plan passe par le point; la partie de cette normale comprise entre la section méridienne et l'axe de révolution, est le rayon d'une sphère qui a son centre sur l'axe, et qui est inscrite ou circonscrite à la surface.

Les normales d'une surface de révolution, menées par les points d'un cercle de cette surface, dont le plan est perpendiculaire à l'axe, ont pour lieu géométrique, un cône droit qui a son sommet sur l'axe, et pour base le cercle de la surface de révolution.

Des surfaces développables.

50. Une *surface développable* est le lieu géométrique des tangentes à une courbe à double courbure, qu'on nomme *arête de rebroussement* de la surface; deux tangentes consécutives correspondent à deux positions consécutives de la ligne droite mobile génératrice de la surface. L'arête de rebroussement partage la surface en deux parties égales et symétriques, dont l'une comprend les tangentes de cette courbe et l'autre leurs prolongemens. Les cylindres et les cônes sont des surfaces développables dont l'arête de rebroussement est un point; ce point est le sommet ou plus exactement, le centre du cône: il est situé à l'infini pour le cylindre. La surface conique est engendrée par une droite mobile, assujétie à passer par un point fixe; lorsque la droite génératrice est constamment parallèle à elle-même, la surface conique se change en une surface cylindrique: la directrice de la droite mobile détermine la forme particulière du cône ou du cylindre.

51. Deux droites consécutives d'une surface développable comprennent un élément de cette surface; tous les élémens peuvent être réunis sur un seul et

même plan. En effet, deux élémens consécutifs étant séparés par une droite de la surface, le second élément peut tourner avec la surface autour de cette droite, jusqu'à ce qu'il s'applique sur le plan du premier élément. Ces deux premiers élémens réunis étant fixes, le troisième élément peut tourner avec la portion de surface qui lui est adjacente pour s'unir au second, et ainsi de suite. Tous ces élémens réunis sur un seul et même plan, forment ce qu'on appelle *le développement de la surface*. Il suit évidemment de ce mode de développement que toutes les courbes planes ou à double courbure tracées sur la surface développable, et qui coupent les droites de cette surface sous des angles déterminés, se transforment sur le plan de développement en d'autres courbes qui coupent les droites de la surface développable rapportées sur ce plan, sous des angles respectivement égaux aux premiers.

En considérant une surface courbe quelconque, rien n'empêche de la concevoir divisée par deux systèmes de plans parallèles, en un assez grand nombre de parties, pour que chaque partie ne diffère pas sensiblement d'un élément plan; mais si toutes ces parties étaient réunies sur un même plan, de manière que deux parties contiguës aient un côté commun, elles laisseraient entre elles des intervalles, ou se superposeraient. L'aire comprise dans le contour extérieur de ces parties ainsi réunies, ne serait pas de même grandeur que la portion de surface courbe formée des mêmes parties; les surfaces développables jouissent seules de cette propriété de pouvoir se développer sur un plan *sans rupture ni duplicature*: elles sont les seules dont les élémens plans ont une dimension illimitée dans le sens des droites de la surface. Les prolongemens de ces élémens dans tous les sens forment les plans tangens de la surface.

De quelque manière qu'un plan se meuve, l'enveloppe de l'espace qu'il parcourt est une *surface développable*. Cette surface est le lieu géométrique des droites, intersections successives du plan mobile.

Nous donnerons des exemples de plans tangens aux surfaces développables, et de développemens de ces surfaces.

Génération des surfaces réglées.

52. Deux droites consécutives d'une surface développable se rencontrent et comprennent un élément plan de cette surface. Dans une surface réglée, deux droites consécutives, quelque petite que soit leur distance, ne se rencontrent pas, et l'élément compris entre ces deux droites n'est pas plan; c'est un élément courbe qui a une dimension illimitée dans le sens des droites qui le comprennent: sa forme est celle d'un plan gauche, et par cette raison

on appelait la surface lieu des élémens de cette forme, *surface gauche*.

La régularité, la symétrie et la forme élégante de certaines surfaces réglées, telles que l'hyperboloïde de révolution engendrée par une droite mobile qui tourne autour d'une autre droite fixe, prouvent suffisamment que la dénomination de *surface gauche* ne convient pas en général aux surfaces engendrées par une ligne droite; c'est ce qui m'a déterminé à substituer à l'épithète *gauche*, le mot *réglée*, qui exprime qu'on peut appliquer l'arête d'une règle sur les droites de la surface.

La surface réglée la plus générale est engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois courbes données; on donne à ces courbes le nom de *directrices*. Prenant un point quelconque sur la première directrice, et le considérant comme le sommet des deux cônes qui ont pour bases les deux autres directrices, les droites intersections de ces cônes appartiennent à la surface réglée. On peut encore déterminer le mouvement de la droite mobile génératrice de la surface par d'autres considérations; par exemple celle-ci: de passer par deux courbes, et de toucher un cylindre sur lequel l'une des deux courbes est donnée.

Dans le paragraphe suivant, on donnera des exemples de plans tangens aux trois espèces de surfaces qu'on vient de définir, et qui sont désignées par les noms de *surfaces développables*, *surfaces de révolution*, *surfaces réglées*.

§ III. EXEMPLES DE PLANS TANGENS AUX SURFACES COURBES.

Premier exemple. — Menér un plan tangent à une surface cylindrique : 1° par un point pris sur la surface; 2° par un point pris hors de la surface; 3° parallèlement à une droite donnée ? (Pl. 6.)

On entend par *surface cylindrique*, une surface développable engendrée par une droite mobile, constamment parallèle à une droite donnée, et dirigée dans son mouvement par une courbe aussi donnée, qu'on appelle la *directrice*.

53. *Solution. — Premier cas. — Le point de contact est donné sur la surface.* On mène par ce point la droite génératrice de la surface; cette droite rencontre la directrice en un point, par lequel on mène une tangente à cette courbe: la tangente et la droite de la surface déterminent le plan tangent demandé. Ce plan ne touche pas seulement la surface au point donné; il contient (art. 51) l'élément cylindrique qui est compris entre deux droites parallèles consécutives, et dont il est le prolongement; ce contact du plan et de la surface a lieu pour tous les points de la droite génératrice, menée par le point donné.

Deuxième cas. — *Le point donné est hors la surface.* On mène par le point donné, une tangente à une section de la surface cylindrique dont le plan passe par ce point; cette tangente, et la droite de la surface menée par le point de contact, déterminent le plan demandé.

Autrement, on mène par le point donné une parallèle D à la droite génératrice de la surface cylindrique; le plan d'une section quelconque de la surface coupe la droite D en un point par lequel on mène une tangente à la section; la droite de la surface qui passe par le point de contact, et sa parallèle D déterminent le plan tangent demandé.

Troisième cas. — *Le plan tangent est parallèle à une droite donnée.* On mène par un point quelconque de l'espace deux droites, l'une parallèle à la droite donnée, et l'autre parallèle à la droite génératrice de la surface cylindrique; on joint ces deux droites par une troisième, telle qu'on puisse mener une tangente à la surface cylindrique, qui lui soit parallèle. Cette tangente et la droite de la surface menée par le point de contact déterminent le plan tangent; ce plan sera parallèle à la droite donnée, parce qu'il passe par des droites parallèles à deux autres droites qui coupent cette droite donnée.

54. *Explication des fig. 1, 2, 3, pl. 6, relatives aux trois cas du problème proposé.* Pour ces trois cas, la surface est un cylindre à base circulaire, c'est-à-dire qu'elle est engendrée par une droite mobile qui a pour directrice un cercle, et on suppose dans les trois figures que le cercle, base d'un cylindre oblique, est donné sur le plan horizontal; XY est sur chaque figure l'intersection du plan horizontal du plan vertical.

(Fig. 1, pl. 6.) *Premier cas.* — *Le point de contact de la surface cylindrique et du plan tangent, n'est donné que par l'une de ses projections.*

Soit $ABCD$ la section circulaire du cylindre, donnée sur le plan horizontal de projection; la génératrice du cylindre est parallèle à une droite donnée (GZ , $G'z$). Ayant mené les diamètres AB , CD , l'un parallèle à l'intersection XY des plans de projection, l'autre perpendiculaire à la projection horizontale GZ d'une parallèle à la génératrice du cylindre, on tirera par les points C , D les droites CE , DF , parallèles à GZ , et par les points a , b , projections verticales des extrémités A , B du diamètre AB , les parallèles ag , bh à la projection verticale $G'z$ de la droite donnée (GZ , $G'z$). Les deux premières parallèles CE , DF sont les limites de la projection horizontale du cylindre, ou, plus exactement, de toutes les lignes appartenantes à ce cylindre; les deux dernières ag , bh forment les limites de la projection verticale.

Le point de contact de la surface cylindrique est donné par une seule pro-

jection. Soit K la projection horizontale donnée; on construira d'abord la seconde projection k ou k' .

Toutes les droites de la surface cylindrique étant parallèles entre elles, celle qui passe par le point de contact a pour projection horizontale une droite KL parallèle à CE ou DF ; mais cette droite coupe le cercle donné aux points L, M , qui ont pour projections verticales les points l, m ; donc la droite lo ou mo' , parallèle à ag ou bh , contiendra la projection verticale du point de contact. Cette projection doit aussi se trouver sur la perpendiculaire Kk à XY , qui coupe les droites lo, mo' aux points k, k' ; d'où il suit que le point de contact est (K, k) ou (K, k') .

Les plans tangens à la surface cylindrique, menés par ces points, ne diffèrent pas (art. 49) des plans tangens, conduits par les droites de la surface $(LMO, lo), (MO, mo')$; or ces droites de contact rencontrent le cercle $ABCD$ aux points L, M ; les plans tangens en ces points auront donc pour traces sur le plan horizontal, les tangentes au cercle LP, MQ . Les mêmes droites de contact rencontrent le plan vertical aux points o, o' ; joignant ces points et ceux où les tangentes LP, MQ coupent la droite XY , on aura les traces verticales Po, Qo' des plans tangens aux points $(K, k), (K, k')$ du cylindre.

On vérifiera l'exactitude des opérations précédentes par les considérations suivantes.

Les deux plans tangens, passant par des droites de la surface qui sont parallèles entre elles, se coupent suivant une parallèle à ces droites : or cette parallèle (RV, rv) coupe le plan vertical au point (V, v) ; donc les deux traces Po, Qo' , prolongées, passent par le point v . Les horizontales des plans tangens menées par les points de contact $(K, k), (K, k')$, coupent le plan vertical aux points s, t ; donc ces points doivent se trouver l'un sur la trace Pv , et l'autre sur la trace Qv .

Les fig. 2, et 3, que nous allons expliquer, se rapportent aux deux autres cas; les points et lignes analogues sont marqués des mêmes lettres dans les trois figures.

55. (Fig. 2, pl. 6.) *Deuxième cas.* — *Le point donné est hors la surface.* Soit (N, n) le point donné hors la surface; la parallèle à la génératrice du cylindre, menée par ce point, coupe le plan vertical au point (V, v) , et le plan du cercle $ABCD$ au point R , par lequel on mène les tangentes RL, RM à ce cercle. Ces tangentes sont les traces horizontales des deux plans tangens au cylindre, qu'on peut mener par le point donné; les points P et Q de ces traces prolongées jusqu'à ce qu'elles coupent la droite XY , appartiennent aux traces verticales des mêmes plans tangens. On aura ces traces en joignant le point v et les points P et Q par les droites Pv, Qv .

Les plans tangens (RP_v), (RQ_v) touchent le cylindre suivant les droites (LO, lo) et (Mu, mu') : or ces droites coupent le plan vertical aux points (O, o), (u, u') ; donc ces points doivent se trouver, l'un en o sur la trace verticale P_v du premier plan tangent, et l'autre en u' sur la trace Q_v du second plan.

L'horizontale (NN', nn') du premier plan rencontre le plan vertical au point n' de la trace P_v ; une horizontale du second plan, menée par le même point donné (N, n), coupe aussi le plan vertical en un point de la trace verticale Q_v de ce second plan.

56. (Fig. 3, pl. 6.) *Troisième cas. — Le plan tangent est parallèle à une droite donnée.*

Soit (UZ, uz) la droite donnée ; par un point (Z, z) de cette droite, on tire une droite ($GZ, G'z$), parallèle à la génératrice du cylindre dont la direction est connue. Les deux droites (UZ, uz), ($GZ, G'z$) déterminent un plan dont la trace sur le plan du cercle ABCD est GU : on mène deux droites $RP, R'Q$, tangentes à ce cercle et parallèles à GU ; ces droites sont les traces horizontales des deux plans tangens qu'on peut mener parallèlement à la droite donnée. Ces plans touchent le cylindre suivant les droites (LO, lo), (Mu, mu') qui coupent le plan vertical aux points (O, o), (u, u') ; d'où il suit que les traces verticales des plans tangens sont $Pov, Q'u'v'$. Ces traces sont parallèles entre elles, et parallèles à une droite telle que ($G''z, G''z'$), intersection du plan vertical de projection et du plan conduit par les deux droites (ZG, zG'), (ZU, zu'). On obtient cette droite ($G''z, G''z'$) en menant par le point G de la droite donnée ($GZ, G'z$), la parallèle $G''z$ à XY, qui coupe l'autre droite donnée (UZ, uz) au point (z, z') ; ce qui détermine la droite $G''z$, parallèle aux traces P_v, Q_v' .

57. Quoique nous n'ayons considéré qu'un cylindre particulier, celui dont la base ou l'intersection par l'un des plans de projection est un cercle, on résoudrait de la même manière les trois derniers problèmes pour tout autre cylindre. Le nombre de solutions pour chaque problème dépend de la base du cylindre, c'est-à-dire de la section du cylindre, donnée sur le plan horizontal. Lorsque cette base est un cercle, une droite ne peut couper la surface du cylindre qu'en deux points ; et, par un point pris en dehors de cette surface, on ne peut lui mener que deux plans tangens. On conçoit facilement une surface cylindrique qui serait coupée par une droite en un plus grand nombre de points, et à laquelle on mènerait par un point pris en dehors, autant de plans tangens qu'on pourrait mener de tangentes à une section plane du cylindre, par un point pris en dehors de cette section.

Deuxième exemple de plan tangent. — *Mener un plan tangent à une surface conique : 1° par un point pris sur la surface ; 2° par un point pris hors la surface ; 3° parallèlement à une droite donnée ? (Pl. 7.)*

On nomme *surface conique*, une surface développable, engendrée par une droite mobile, assujétie à passer constamment par un point donné, et par une courbe qu'on appelle la *directrice* de la droite génératrice.

58. *Solution.* — *Premier cas.* — *Le point de contact est donné sur la surface.* On mène par ce point la droite génératrice de la surface ; cette droite rencontre la directrice en un point, par lequel on mène une tangente à cette courbe. La tangente et la droite de la surface déterminent (art. 51) le plan tangent demandé. Ce plan ne touche pas seulement la surface au point donné ; il contient l'élément qui est compris entre deux droites concourantes vers le sommet du cône, et dont il est le prolongement : le contact du plan et de la surface a lieu pour tous les points de la droite menée par le point donné.

Deuxième cas. — *Le point est donné hors la surface.* On mène par le point donné une tangente à une courbe de la surface conique, dont le plan passe par ce point. La droite de la surface conique menée par le point de contact de la courbe et de la tangente, et la tangente elle-même, déterminent le plan demandé. *Autrement*, on mène par le point donné et par le sommet du cône une droite D, qui est rencontrée par le plan d'une section connue du cône en un point, par lequel on mène une tangente à la section ; la droite du cône qui passe par le point de contact, et la droite D appartiennent au plan tangent demandé.

Troisième cas. — *Le plan tangent est parallèle à une droite donnée.* On mène par le sommet de la surface conique une parallèle à la droite donnée, et on prend sur cette parallèle un point par lequel on puisse mener une tangente à une ligne connue de la surface conique. Cette tangente et la parallèle à la droite donnée, fixent la position du plan tangent. La droite de contact du plan et du cône est déterminée par le point de contact de la tangente à la ligne connue de la surface conique.

59. *Explication des fig. 1, 2, 3, pl. 7, relatives aux trois cas du problème proposé.* On suppose que pour ces trois cas la surface est un cône à base circulaire, c'est-à-dire qu'elle est engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur un cercle comme directrice. Le cercle, base du cône, est donné sur le plan horizontal ; la droite XY est sur chaque figure l'intersection du plan horizontal et du plan vertical de projection.

(Fig. 1, pl. 7.) *Premier cas.* — Le point de contact de la surface conique et du plan tangent, n'est donné que par l'une de ses projections. Soit ABCD l'intersection du cône par le plan horizontal; on prend cette intersection pour la base du cône qui, dans ce cas particulier, est un cercle du rayon $\gamma\Delta$; le sommet du cône est donné. Soient E; e les projections horizontale et verticale de ce sommet; les tangentes EC, ED menées par le point E au cercle ABCD, sont les limites de la projection horizontale du cône; elles peuvent être considérées comme les traces horizontales de deux plans tangens verticaux, qui touchent le cône suivant les droites (EC, ee), (ED, ed). Ayant mené le diamètre AB parallèle à l'intersection XY des deux plans de projection, les droites du cône qui passent par les points A et B, ont pour projections verticales les droites ea , eb qui sont les limites de la projection verticale du cône.

Le point de contact de la surface conique est donné par une seule projection. Soit K (fig. 1) la projection horizontale donnée, on construira d'abord la seconde projection k ou k' du point de contact.

Toutes les droites de la surface conique devant passer par le sommet du cône, celle qui passe par le point de contact (K, k) ou (K, k'), a pour projection horizontale la droite EKML, qui coupe le cercle donné ABCD aux points L, M; mais les droites du cône qui passent par ces points d'intersection ont pour projections verticales les droites le , me , et elles contiennent par hypothèse les points de contact; donc ces points se trouvent en projection verticale, et sur la perpendiculaire Kk à l'intersection commune XY des plans de projection; et sur les droites le , me , par conséquent aux intersections k , k' de ces droites et de la perpendiculaire Kk ; d'où il suit que le point de la surface conique, pour lequel on demande le plan tangent, est ou (K, k), ou (K, k'), et que les droites de contact sont (EL, el) pour le premier point, et (EM, em) pour le second.

Ces droites de contact rencontrant le cercle donné aux points L et M, les plans tangens en ces points auront pour traces horizontales les tangentes LP, MQ du cercle ABCD. Les mêmes droites de contact rencontrent le plan vertical aux points o , o' ; joignant ces points et ceux où les tangentes LP, MQ coupent la droite XY, on aura les traces verticales Po , Qo' des plans tangens aux points (K, k), (K, k') de la surface conique.

On vérifiera, comme pour le cylindre (art. 54), les opérations graphiques par lesquelles on vient de trouver les traces des plans (RPo), (RQo') tangens aux cônes.

Les deux plans tangens (RPo), (RQo') se coupent suivant la droite (ER, er): or cette droite coupe le plan vertical au point v de la droite Vv ; donc les traces Po , Qo' passent par ce point v .

Les horizontales des plans tangens menées par les points de contact (K, k) , (K, k') coupent le plan vertical aux points s et t ; donc ces points doivent se trouver l'un sur la trace verticale Pvo , et l'autre sur la trace verticale Qvo .

60. Les fig. 2 et 3 que nous allons expliquer se rapportent aux deux autres cas; les points et lignes analogues sont marqués des mêmes lettres dans les trois figures.

(Fig. 2, pl. 7.) — *Deuxième cas.* — *Le point donné est hors de la surface.* Soit (N, n) le point donné hors la surface, par lequel il s'agit de mener un plan tangent à cette surface. Puisque tous les plans tangens d'un cône passent par le sommet du cône, le plan demandé passera par la droite (EN, en) qui joint ce sommet et le point donné : or cette droite coupe le plan du cercle donné $ABCD$ au point R , par lequel on peut mener les tangentes RL, RM à ce cercle; donc ces tangentes sont les traces horizontales des plans tangens au cône, qu'on peut mener par le point donné. D'ailleurs ces plans sont conduits par la droite (EN, en) qui coupe le plan vertical au point v ; donc ils ont pour traces verticales les droites Pv, Qv .

Les plans tangens (RPv) , (RQv) touchent le cône suivant les droites (EL, el) , (EM, em) qui coupent le plan vertical de projection aux points o et u ; donc ces points doivent se trouver l'un sur la trace verticale Pvo , l'autre sur la trace Qvu .

L'horizontale (NN, nn') du premier plan tangent (RPv) rencontre le plan vertical au point n' de la trace Pv , et l'horizontale (NT, nt') le rencontre au point t qui se trouve sur la trace Qv du second plan tangent (RQv) .

(Fig. 3, pl. 7.) — *Troisième cas.* — *Le plan tangent est parallèle à une droite donnée.*

Soit (UZ, uz) la droite donnée. La parallèle à cette droite, menée par le sommet du cône, ayant pour projection les droites ER, er , elle coupe les plans de projection aux points R et v , par lesquels les traces des plans tangens doivent passer; d'où il suit que les tangentes RL, RM menées par le point R au cercle $ABCD$, sont les traces horizontales de ces plans. Ces traces coupent la droite XY aux points P et Q ; d'où il suit que les droites Pv, Qv sont les traces verticales des plans tangens.

Les points (O, o) et (O', u) du plan vertical de projection que l'on construit comme sur la figure précédente, appartiennent l'un à la trace Pvo , et l'autre à la trace Qvu .

En substituant au cercle $ABCD$, intersection d'un cône par le plan horizontal, toute autre courbe, on résoudreait de la même manière les trois cas du plan tangent au cône proposé.

Du plan tangent à la surface développable, engendrée par une droite mobile, qui passe par deux courbes données. (Troisième exemple.)

61. Trois courbes sont nécessaires pour diriger le mouvement d'une droite qui engendre la surface réglée générale; mais lorsque cette surface est développable, deux courbes suffisent. En effet, soient C et C' les deux courbes données; on prend sur la première C un point quelconque P que l'on regarde, comme le sommet d'un cône qui a pour base la courbe C' . La courbe C étant donnée, la tangente à cette courbe au point P est déterminée; on mène par cette tangente un plan tangent au cône (art. 58); la droite de contact appartient à la surface développable demandée.

Prenant sur la courbe C un autre point P' , sommet d'un second cône passant par la courbe C' , le plan tangent à ce cône mené par la tangente à la courbe C' au point P' , passera par une tangente à la courbe C' ; nommant Q' le point de contact sur cette courbe C' , une droite de la surface développable passera par les points P' et Q' ; on obtiendra ainsi une série de droites PQ , $P'Q'$, $P''Q''$ dont le lieu géométrique est la surface développable demandée. Cette construction a pour objet de déterminer les couples de tangentes aux courbes C et C' , qui sont situées dans le même plan; les plans successifs de ces divers couples se coupent, et les droites d'intersection appartiennent à la surface développable, car deux droites tangentes aux courbes C et C' étant dans un même plan, les deux droites consécutives infiniment voisines qui s'appuient sur ces deux courbes et sur leurs tangentes, sont aussi dans ce plan: ce qui est le caractère des surfaces développables.

62. Ayant construit les droites de la surface développable qui passe par deux courbes données, il s'agit de lui mener un plan tangent, 1° par un point donné sur la surface, 2° par un point donné hors la surface, ou parallèlement à une droite donnée.

Premier cas. — Le point est donné sur la surface. Soit D la droite de la surface qui passe par ce point; cette droite rencontrera l'une des courbes données C , C' , où toute autre courbe de la surface à laquelle on sait mener des tangentes; la tangente à cette courbe menée par le point de rencontre, et la droite D , déterminent le plan tangent demandé.

Deuxième cas. — Le point est donné hors la surface. On mènera par ce point P un plan quelconque qui coupera la surface suivant une courbe que l'on construira par points; la tangente à cette courbe, menée par le point P , la touchera en un point P' ; la droite de la surface développable qui passe par ce point P' , et la droite PP' qui joint les points P et P' , déterminent le

plan tangent qui passe par le point donné hors de la surface. Si le plan tangent doit être parallèle à une droite donnée, on coupe la surface par un plan quelconque qui passe par une parallèle à cette droite, et on mène une seconde parallèle, tangente à la section; le plan mené par cette tangente et par la droite de la surface développable qui passe par le point de contact, est tangent à cette surface.

On voit que la solution graphique de ce second cas dépend des intersections de surfaces courbes par des plans, qui seront l'objet du chapitre suivant.

Quatrième Exemple. — Plan tangent à une surface de révolution. — Par un point donné sur une surface de révolution, mener un plan tangent à cette surface ? (Pl. 8.)

63. *Solution.* On conçoit par le point donné et par l'axe de révolution, un plan qui contient une section méridienne (art. 44) de la surface. Le plan tangent passe par une tangente à cette section menée par le point donné; mais la surface étant composée d'une suite de cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de révolution, le plan tangent au point donné passe aussi par la tangente au cercle de la surface auquel ce point appartient; d'où il suit que le plan tangent d'une surface de révolution est déterminé par les deux tangentes menées par le point donné à la section méridienne et au cercle, qui se croisent à angle droit en ce point.

La tangente au cercle étant perpendiculaire au plan de la section méridienne, le plan tangent en un point quelconque d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien qui passe par ce point. La double condition de passer par une tangente à la section méridienne d'un point de la surface, et d'être perpendiculaire au plan de cette section, déterminent le plan tangent en ce point.

64. *Explication de la fig. 1, pl. 8, pour le cas particulier où la surface de révolution est un ellipsoïde.* On prend pour plan horizontal de projection un plan perpendiculaire à l'axe de révolution; le point de contact sur la surface est donné par une seule projection.

Soit (A, abc) l'axe de révolution, M la projection horizontale du point de contact; le plan méridien mené par le point M a pour traces sur les plans de projection les droites MAT et T'U'. En le faisant tourner autour de l'axe (A, abc), il arrive dans la position DAEL' parallèle à l'intersection XY des plans de projection. Considérant la droite DAE comme la trace d'un plan méridien parallèle au plan vertical, ce plan coupe la surface suivant une

section méridienne $c b d e$ divisée en deux parties égales par l'axe $b c$. Faisant $A M = A M'$, et élevant par le point M' la verticale $M' n' n''$ qui coupe la section méridienne aux points n' , n'' , les horizontales $n' m$, $n'' m'$ contiennent les projections verticales des points de contact de la surface de révolution, correspondantes à la projection horizontale donnée M ; d'où il suit que ces projections verticales sont déterminées par la rencontre des droites $n' m$, $n'' m'$ et de la perpendiculaire $M m' m$ à l'intersection $X Y$ des plans de projection. Le point connu de la surface étant (M, m) ou (M, m') , il s'agit de trouver les traces du plan tangent mené par l'un et l'autre point, en observant que dans le cas particulier où la section méridienne est une ellipse $b c d e$, les points m , m' sont à égale distance du second axe $d e$ de l'ellipse, perpendiculaire au premier $b c$.

La tangente à l'ellipse au point n' , coupe la droite $X Y$ au point I' , et cette tangente, considérée successivement dans les plans méridiens $A L'$, $A L$, coupe le plan horizontal aux points L' , L ; d'où il suit que la tangente au point (M, m) de la section méridienne $A M$, rencontre le plan horizontal au point L ; le plan tangent au même point (M, m) passera donc aussi par le point L , et comme il est perpendiculaire au plan méridien vertical $A M L$, il a pour trace sur le plan horizontal la droite $L Q$ perpendiculaire à $A L$. D'ailleurs l'horizontale $(M P, m p)$ du plan tangent coupe le plan vertical au point p ; donc le plan tangent $(L Q p)$ au point (M, m) de la surface de révolution, a pour trace sur le plan vertical la droite $Q p$.

On trouvera de la même manière que le plan tangent au point (M, m') a pour traces sur les plans de projection les droites $K R$ et $R s$. Les deux traces horizontales $L Q$, $K R$ perpendiculaires à la même droite $A M$, sont parallèles, et les deux traces verticales $Q p$, $R s$ se coupent en un point s , qui est situé sur le prolongement de l'axe horizontal de l'ellipse; par la même raison que les tangentes aux points n' , n'' de cette ellipse, se rencontrent au point s' du même axe. Les deux plans tangens à l'ellipsoïde de révolution ayant leurs points de contact sur le même méridien, et à même distance du centre de l'ellipsoïde, ils se coupent suivant une horizontale située sur le plan du plus grand cercle de la surface dont le diamètre est $d e$; cette horizontale se projette donc sur le plan vertical suivant la droite $d e$: d'où il suit que cette droite de prolongée, doit passer par le point s de l'intersection des deux plans tangens.

On s'assurerait de l'exactitude des traces verticales $R s$, $Q s$ des plans tangens, en cherchant les points de rencontre du plan vertical et des tangentes à la section méridienne menées par les points donnés. Ces tangentes ont pour projections verticales les droites $l n$, $k n'$, et pour projections sur le plan ho-

horizontal, la droite unique ALMT. Considérant cette droite AT comme la trace horizontale d'un plan vertical qui coupe le plan vertical de projection suivant la verticale tT' , les points d'intersection t, t' de cette verticale et des droites lm, lm' prolongées, se trouvent nécessairement l'un sur la direction de la trace Qp, et l'autre sur la direction de la trace Rs.

De ce que la tangente ln' coupe l'axe abc au point o , il s'ensuit que la droite lm prolongée doit passer par le même point; car on peut considérer le point o de l'axe de révolution comme le sommet d'un cône droit, circonscrit à la surface de révolution suivant le cercle du diamètre $n\pi$; or les droites de ce cône droit sont des tangentes aux sections méridiennes, menées par les points du cercle; donc la tangente qui passe par le point (M, m) a pour projection verticale la droite lmo , qui passe par le point o de l'axe abc . On prouverait de la même manière que les droites $n'k', m'k'$ prolongées doivent passer par le point o' du même axe abc .

Ayant prolongé le plan méridien DAE parallèle au plan vertical de projection, jusqu'à ce qu'il rencontre en Q' la trace horizontale LQ du plan tangent (LQp), le plan méridien et le plan tangent se coupent suivant la droite (AQ, oq'); d'où il suit que la projection verticale oq' de cette droite est parallèle à la trace verticale Q t du plan tangent (LQ'p). On trouverait de la même manière la parallèle à la trace verticale Rs du plan tangent (KR t), passant par le point o' de l'axe de révolution oo' .

65. Le chapitre suivant traitera des intersections de surfaces par des plans et par d'autres surfaces courbes, des tangentes aux courbes qui résultent de la pénétration des surfaces; il contiendra de nouveaux exemples de plans tangens. On y considérera les plans tangens de la seconde espèce qui sont à la fois tangens et sécans, et on donnera quelques exemples des lignes suivant lesquelles ces plans prolongés au-delà du point de contact, coupent les surfaces.

CHAPITRE III.

Des intersections de surfaces courbes par des plans, et par d'autres surfaces courbes.

§ 1^{er}. DES INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES PAR DES PLANS.

66. La courbe d'intersection d'une surface par un plan, passe par tous les points dans lesquels ce plan coupe un système de lignes données sur la surface.

Considérant sur la surface donnée une ligne quelconque, qui rencontre le plan coupant en un ou plusieurs points, ces points appartiennent à l'intersection de la surface et du plan. La ligne de la surface que l'on considère, peut être ou une ligne droite, ou une ligne courbe plane, ou une courbe à double courbure; tous les problèmes relatifs à l'intersection des surfaces se réduisent donc à trouver l'intersection de l'une de ces trois lignes par un plan.

Si la surface a pour génératrice une ligne droite, le plan coupant rencontrera cette droite dans toutes ses positions.

Le problème qui consiste à trouver le point de rencontre d'une droite et d'un plan ayant été résolu (art. 17), on appliquera la même solution à toutes les droites de la surface. La ligne continue, menée par tous les points d'intersection de ces droites et du plan, sera l'intersection de la surface proposée par le plan donné.

67. Lorsque la surface a pour génératrice une courbe plane, dont le plan est variable de position, et qui varie elle-même dans son plan, le plan variable, considéré dans une position déterminée, rencontre le plan coupant suivant une droite, et les deux plans n'ont de commun que les points de cette droite; d'où il suit que les points d'intersection du plan coupant et de la courbe génératrice se trouvent nécessairement sur cette droite. On a vu (art. 16) comment on trouve la ligne d'intersection de deux plans; cette ligne, et la courbe génératrice située dans le plan que l'on considère, se coupent en un ou plusieurs points qui appartiennent à la courbe d'intersection de la surface proposée et du plan coupant.

68. Le troisième cas et le plus général a lieu, lorsque la surface est engen-

drée par une courbe à double courbure. On ramène ce dernier cas au premier, en plaçant la courbe génératrice considérée dans une position déterminée sur une surface réglée, dont cette courbe est prise pour l'une des trois directrices (art. 52). Les deux autres directrices sont arbitraires; on peut se donner deux lignes droites placées d'une manière quelconque par rapport à la courbe donnée. Prenant un point sur cette courbe, on mènera, par ce point et par l'une des droites directrices, un plan qui coupera la seconde droite directrice en un point. Joignant ce dernier point et celui qu'on a pris sur la directrice courbe, par une droite, cette droite appartient à une surface réglée qui passe par la courbe donnée. Le plan coupant, qui, par hypothèse, rencontre cette courbe, coupe nécessairement la surface réglée, et la section contient les points communs au plan et à la courbe; donc ces points se trouveront nécessairement sur la section plane de la surface réglée et sur la courbe donnée, par conséquent à l'intersection de ces deux courbes.

Lorsqu'on donne une courbe génératrice par ses deux projections, on donne aussi deux surfaces cylindriques engendrées par des droites perpendiculaires aux plans de projection; chacune de ces surfaces contient la courbe donnée et tient lieu de la surface réglée, qui a pour directrices deux droites arbitraires, prises hors de la courbe donnée. Chaque cylindre étant coupé par le plan qui, par hypothèse, rencontre la courbe donnée, cette courbe et la ligne d'intersection sur le cylindre auront des points communs, qui seront les points demandés.

Exemples d'intersections de surfaces par des plans.

Nous considérerons successivement les surfaces développables, les surfaces de révolution, les surfaces réglées, et les lignes d'intersection de ces surfaces par des plans.

§ II. DES SURFACES DÉVELOPPABLES COUPÉES PAR UN PLAN.

Premier exemple. — Intersection du cylindre droit à base circulaire par un plan. (Pl. 9.)

69. Le cercle, base du cylindre, est donné sur le plan horizontal; on suppose la droite génératrice de la surface cylindrique, verticale, et le plan coupant perpendiculaire au plan vertical de projection. Dans cette hypothèse, la courbe d'intersection du cylindre par le plan, a pour projection horizon

tales, le cercle base du cylindre, et pour projection verticale, la droite, trace du plan coupant sur le plan vertical. Si l'on veut connaître cette courbe telle qu'elle est dans son plan, on fait tourner ce plan jusqu'à ce qu'il s'applique ou sur le plan horizontal ou sur le plan vertical de projection, et on détermine ce que devient chaque point de la courbe après ce mouvement de rotation. Cette construction est le principal objet des *fig. 1, 1.a, pl. 9.*

70. *Explication des fig. 1, 1.a, 1.b, pl. 9.* Soit ABCD *fig. 1*, la base circulaire du cylindre droit vertical; élevant les perpendiculaires AA', BB' à la commune intersection XY des plans de projection, ces perpendiculaires sont les limites de la projection verticale du cylindre. La *fig. 1* comprend les deux projections, horizontale et verticale.

Soit Fg (*fig. 1*) la trace verticale du plan coupant; puisqu'on suppose ce plan perpendiculaire au plan vertical de projection, sa trace sur le plan horizontal sera une droite FE, perpendiculaire à l'intersection XY des plans de projection. La courbe d'intersection du cylindre par le plan EFG, a pour projection horizontale le cercle ABCD, et pour projection verticale la droite Fg.

Pour la construire dans son plan, on suppose que ce plan tourne autour de sa trace verticale Fg, et on cherche ce que devient un point quelconque (H, h) de la courbe, lorsqu'il s'applique sur le plan vertical. La distance de ce point à la droite Fg autour de laquelle il tourne, est égale à l'horizontal H'H. Ayant transporté la trace Fg parallèlement à elle-même en F'g' (*fig. 1.a*), et le point h de cette trace en V, la perpendiculaire Vh', de même longueur que l'horizontal H'H', sera la distance du point de la courbe à son axe de rotation, et l'extrémité h' de cette perpendiculaire sera le point (H, h) de la courbe, appliqué sur le plan vertical. On aurait le point h' de cette courbe, situé sur la même droite VH', en posant Vh' = H'I; ce point h' a pour projection horizontale le point I du cercle ABCD, et pour projection verticale le point h situé sur la droite H'Ih'. On trouverait tant d'autres points qu'on voudrait de la courbe a'h'h' (*fig. 1.a*) intersection du cylindre et du plan. Chaque point de cette courbe, tel que h', est déterminé (art. 3) par une abscisse FV = Fh, comptée sur l'axe des abscisses F'g', et par une ordonnée Vh' perpendiculaire à l'abscisse.

Au lieu de faire tourner le plan de la courbe autour de l'une des traces du plan coupant sur les plans de projection, on imagine par le centre O du cercle ABCD deux diamètres, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle à la trace horizontale FE, et par ces diamètres deux plans verticaux, qui rencontrent le plan coupant EFG suivant deux droites, l'une (aδ, Fg), l'autre horizontale (CD, c), perpendiculaire à la première au point (O, c), et on fait tourner le plan de la courbe successivement autour de ces deux droites.

Transportant la droite ab parallèlement à elle-même en $a''b''$, et le point h en J' sur la perpendiculaire hJ' à ab , on aura les points h' , h'' de la courbe $a''b''h'h'$ (*fig. 1.a*), en faisant $J'h = J'h'' = JH = JI$; la droite $a''b''$ (*fig. 1.a*) est, sur le plan de la courbe, la droite (AB, ab) , (*fig. 1*).

Abaisant la seconde droite (CD, c) sur le plan horizontal en CD , et faisant tourner le plan de la courbe autour de cette droite transportée en CD , le point (H, h) de la courbe décrira un cercle d'un rayon égal à ch .

Ayant élevé la perpendiculaire HQ' à CD , et portant du point Q' en P' une droite $QP' = ch$, le point P' sera ce que devient le point (H, h) de la courbe, après avoir tourné autour de la droite (CD, c) pour s'appliquer sur le plan horizontal passant par cette droite.

On trouvera de la même manière tant d'autres points de la courbe $CDP'P''$ (*fig. 1.b*), qui ne diffère pas de la courbe $c'c'h'h'$ (*fig. 1.a*). Si l'on compare les dimensions de cette courbe dans les deux figures 1.a, 1.b, on aura :

$$CD = c'c'; a\beta = a''\beta'' = a'\beta', \text{ fig. 1; } P'Q' = P''Q'' = p'h' = p'h'.$$

De la tangente à la courbe d'intersection d'un cylindre droit vertical par un plan.

71. La tangente en un point quelconque (H, h) de la courbe appartient au plan tangent du cylindre; elle est aussi sur le plan coupant: elle est par conséquent l'intersection de ces deux plans (art. 45). Le plan tangent au point (H, h) du cylindre vertical, est vertical (art. 53), et a pour trace sur le plan horizontal de projection la tangente au cercle LHE menée par le point H de ce cercle; or ce plan coupe le plan de la courbe au point E de la trace horizontale FE : le point de la courbe (H, h) est commun à ces deux plans, donc en portant FE en $F'E'$ (*fig. 1.a*), et joignant le point h' de la courbe avec le point E' de l'intersection des deux plans, la droite $E'h'$ sera la tangente au point h' de la courbe $c'c'h'h'$.

En raisonnant de la même manière, on obtiendra la tangente au même point (H, h) , rapportée en P' sur la *fig. 1.b*. La tangente LHE coupe le diamètre CD au point I de l'intersection du plan tangent et du plan de la courbe. Joignant ce point et le point P' de la courbe par une droite, on aura la tangente LP' au point P' (*fig. 1.b*), et h' (*fig. 1.a*).

72. Comparant les *fig. 1.a* et *fig. 1.b*, dont chacune représente la courbe résultant de l'intersection du cylindre par le plan (EFG) , on a : $M'EN = E'N$; $TO = r'O'$.

La courbe $CDa\beta$ (*fig. 1.b*) est une ellipse qui a pour axes principaux les droites rectangulaires CD et $a\beta$. En décrivant sur le plus petit de ces axes,

comme diamètre, le cercle ABCD, on voit que pour les points du cercle et de l'ellipse, situés sur une droite quelconque P'Q' perpendiculaire au diamètre commun CD, la sous-tangente Q'CL de ces deux courbes est la même. On démontre cette proposition par l'algèbre, dans les traités des courbes du second degré; la construction géométrique précédente fait voir que les deux tangentes P'L, HL doivent en effet concourir en un même point L du diamètre CDL.

Deuxième exemple, — Intersection du cône droit à base circulaire par un plan.
(Pl. 10.)

73. Lorsqu'un cône à base circulaire est droit, la ligne droite menée par le sommet de ce cône, et par le centre du cercle qui lui sert de base, est perpendiculaire au plan de ce cercle. Si cette droite, qu'on nomme *axe du cône*, est oblique par rapport au plan du cercle, le cône est oblique.

On peut concevoir sur le cône droit deux systèmes de lignes, ou des droites dirigées du sommet vers les points de la base circulaire, ou des cercles parallèles à la base, qui ont pour rayons les perpendiculaires abaissées de l'une quelconque des droites du premier système sur l'axe. Le plan coupant, donné de position par rapport à la surface, rencontre et les droites du premier système, et les cercles du second système; en des points qui appartiennent à la courbe d'intersection du plan et du cône:

74. *Explication de la fig. 1, pl. 10.* La surface et le plan coupant étant donnés de position dans l'espace, on prend pour plan horizontal le plan du cercle base du cône, et pour plan vertical un plan perpendiculaire au plan coupant. Soit ABCD (fig. 1, pl. 10) le cercle base du cône; FN la trace horizontale du plan coupant; XY perpendiculaire à FN, l'intersection du plan horizontal et du plan vertical de projection; Fg la trace verticale du plan coupant NFg. Quelle que soit la courbe d'intersection contenue dans ce plan, la projection verticale de cette courbe se confondra avec la trace Fg, puisque (art. 4 et 8) le plan coupant est par hypothèse perpendiculaire au plan vertical de projection.

Ayant mené le diamètre AB parallèle à l'intersection XY des plans de projection, on divise chaque demi-circonférence ABC, ABD en un certain nombre de parties égales, par exemple en douze parties; les droites menées du centre O du cercle aux points de division, sont les projections horizontales des droites de la surface conique, menées du sommet aux mêmes points de division. Soit (OH, oH') l'une de ces droites; elle est rencontrée par le plan coupant (NFg) au point (M, m). De ces deux points m, M, le premier détermine le second, puisqu'ils sont sur une perpendiculaire mM à la droite XY.

La droite oH est aussi la projection verticale d'une droite de la surface dont OI est la projection horizontale; d'où il suit que la perpendiculaire mM à XY coupe la droite OI au point S , qui appartient comme le point M à la projection horizontale $LMPS$ de la courbe d'intersection du cône et du plan.

Les droites oA' , oB' projections verticales des droites du cône, qui ont pour projections horizontales OA , OB , sont les limites de la projection verticale du cône; la trace Fg coupe ces limites aux points l , p , qui déterminent les points L , P de la projection horizontale $LMPS$.

En opérant de la même manière sur toute autre droite de la surface conique comme sur la droite (OH, oH') , on construira tant de points qu'on voudra de la projection horizontale et l'intersection du cône et du plan.

Considérant sur le cône le second système de lignes, c'est-à-dire les cercles engendrés par les points d'une droite de la surface telle que $(AO, A'o)$, tournant autour de l'axe $(O, O'o)$, chacun de ces cercles est rencontré par le plan coupant en deux points, dont les projections appartiendront à la courbe déjà construite $LMPS$.

75. Soit as une horizontale, ou plutôt la trace verticale d'un plan horizontal qui coupe le cône suivant un cercle du diamètre as . La circonférence décrite du point O comme centre avec un rayon moitié de as , rencontre la perpendiculaire mM à XY aux points M et S de la courbe $LMPS$, projection horizontale de la courbe d'intersection du cône et du plan. Tous les cercles du cône coupés par le plan sont renfermés dans les plans horizontaux qui ont pour traces verticales les horizontales h et $p\pi$.

On doit remarquer, parmi ces cercles, celui dont le diamètre as passe par le point i , où la projection verticale $O'o$ de l'axe du cône coupe la trace Fg . La projection horizontale de ce cercle coupe la droite OO' perpendiculaire à XY , aux deux points R et Q , qui appartiennent à la courbe $LMPS$.

En suivant le premier mode de construction de cette courbe, on n'aurait pas trouvé directement les deux points R et Q , et les points voisins de ceux-là ne seraient déterminés que par des lignes qui se couperaient fort obliquement.

On ne parvient au tracé exact de la courbe $LMPS$ que par la combinaison des deux modes de construction, qui résultent de la considération de la double génération du cône par la ligne droite et le cercle.

76. La courbe $LMPS$ et la droite Fg étant les deux projections de l'intersection du cône $(ABCO, A'B'o)$ par le plan (NFg) , on obtient cette intersection dans son plan en faisant tourner ce plan autour de l'une de ses traces, sur les plans de projection.

Comptant les abscisses (art. 3) de cette courbe d'intersection, sur la trace

verticale Fg du plan coupant, les ordonnées sont des horizontales perpendiculaires à cette trace; ou prenant la trace horizontale FN pour l'axe des abscisses, les ordonnées sont des parallèles à la trace verticale Fg . Les *fig. 1 a*, *fig. 1 b* font voir la courbe d'intersection, lorsque le plan de cette courbe est appliqué sur les plans vertical et horizontal de projection, après avoir tourné autour des traces Fg , FN ,

77. *Explication de la fig. 1 a.* Fm étant l'abscisse du point (M, m) d'une courbe située dans le plan (Nfg) , il s'agit de trouver la position de ce point sur la *fig. 1 a*.

Ayant mené par le point donné m la perpendiculaire mM à XY , et la perpendiculaire mn' à la trace Fg , on fera cette perpendiculaire mn' de même longueur que la distance MM' du point donné M à la droite XY , et le point m' sera le point de la courbe (M, m) appliqué sur le plan vertical. On aurait le point m'' en prenant $mm'' = M'S$.

78. *Explication de la fig. 1 b.* FN étant l'abscisse du point (M, m) d'une courbe située dans le plan (Nfg) , on demande la position de ce point sur la *fig. 1 b*, après avoir tourné autour de la trace horizontale FN .

Ayant élevé par le point donné M la perpendiculaire $N\mu'$ à la trace FN , on porte sur cette perpendiculaire la longueur $N\mu' = Fm$, et le point μ' est encore le point (M, m) de la courbe, appliqué sur le plan horizontal. On aurait le point s en élevant la perpendiculaire ST à FN , et la prolongeant en s , de manière qu'on ait $Ts = Fm$.

On trouverait de la même manière que les points de la courbe d'intersection (L, l) , (P, p) deviennent sur la *fig. (1 a)*, l' , p' , et sur la *fig. (1 b)*, q' , q' .

Le plan vertical OU rencontre le plan coupant (Nfp) , suivant une droite qui divise en deux parties égales et symétriques, la courbe d'intersection du cône et du plan; pour rapporter cette droite sur la *fig. 1 a*, on mènera FN' perpendiculaire à Fg , et on portera sur cette droite une longueur $FU' = FU$ (*fig. 1*); la parallèle $U'p'$ à la trace Fg divisera en deux parties égales les ordonnées de la courbe, telles que $m'm''$, perpendiculaires à cette trace: ainsi on a $km' = km'' = KM = KS$ (*fig. 1*).

De la tangente à la courbe d'intersection du cône et d'un plan.

79. Soit (M, m) (*fig. 1, pl. 10*) un point quelconque de l'intersection du cône et du plan; le plan tangent au cône mené par ce point, passe par la droite (OMH, omH') , qui rencontre le cercle base du cône au point H , et ce plan a (art. 58 et 59) pour trace horizontale, la tangente HE du cercle ABC : or cette trace coupe la trace FN du plan tangent au point E ; donc ce point appartient à la tangente EM de la courbe $LMPs$.

Pour rapporter cette tangente EM sur les fig. 1.a et 1.b, on portera FE en FE' (fig. 1.a), et la droite E'm' sera la tangente de la courbe *m'p'm'*. Le point (M, m) s'appliquant en μ' (fig. 1.b), on aura la tangente en ce point μ' de la courbe $\phi'\mu'\psi'$, en menant la droite E. μ' par le point E où la tangente au cercle HE coupe la trace horizontale FN du plan coupant.

Du cône à base circulaire et de ses trois sections dites Ellipse, Hyperbole, Parabole. (Pl. 11.)

80. Nous venons de considérer le cas où le cône à base circulaire est droit, et nous avons supposé qu'un plan coupait toutes les droites de la surface, ou toutes les arêtes du cône; dans cette hypothèse, la courbe d'intersection du cône par le plan est une courbe fermée à laquelle on a donné le nom d'*ellipse*. Que le cône soit droit ou oblique, il est formé de deux nappes symétriques, qui n'ont de commun que le sommet du cône. Les sections de ce cône par un plan affectent trois formes différentes; d'où résulte leur division en trois espèces, qu'on nomme *ellipse*, *hyperbole*, *parabole*. Avant de construire l'intersection d'un cône par un plan, on pourra toujours reconnaître à quelle espèce cette courbe d'intersection appartient.

Quelle que soit la position d'un cône par rapport à un plan, toutes les arêtes sont rencontrées par ce plan, à moins qu'une ou plusieurs arêtes ne soient parallèles au plan coupant. Si toutes les arêtes sont rencontrées, la section est une *ellipse*; dans le cas où une ou plusieurs arêtes sont parallèles au plan coupant, la courbe a une ou deux branches infinies. La courbe à une seule branche infinie, située sur l'une des deux nappes du cône, se nomme *parabole*; celle qui a deux branches infinies, situées sur les deux nappes, se nomme *hyperbole*.

81. Pour reconnaître si la courbe d'intersection d'un cône par un plan s'étend à l'infini, on mènera par le sommet du cône un plan parallèle au plan coupant, et on le prolongera jusqu'au plan du cercle base du cône. La droite intersection de ces deux plans sera ou sécante ou tangente du cercle, ou n'aura aucun point commun avec ce cercle. Dans ce dernier cas, le cône n'a aucune arête parallèle au plan coupant, et la section est une *ellipse*. Si la droite coupe la circonférence de la base en deux points, les deux arêtes du cône menées par ces points seront parallèles au plan coupant; et la courbe d'intersection, composée de deux branches situées sur les deux nappes du cône, s'étendra à l'infini sur chaque nappe. Cette courbe est l'*hyperbole*. Le troisième cas a lieu lorsque le plan parallèle au plan coupant, mené par le sommet du cône, est tangent au cercle. Alors il y a un point de la courbe, si-

tué à l'infini sur l'arête de contact parallèle au plan coupant. La courbe contenue dans ce plan diffère de l'hyperbole, parce qu'elle ne s'étend que sur une seule nappe du cône (*).

82. Connaissant les arêtes du cône parallèles au plan coupant, il sera facile de construire les *asymptotes*; on nomme ainsi les droites qui touchent une section conique, en des points situés à l'infini, et qui sont néanmoins à une distance finie d'un point pris à volonté sur la section. En effet, la tangente en un point quelconque de la section conique, résulte de l'intersection du plan tangent au cône en ce point, et du plan de la section: or le plan tangent en un point d'un cône touche le cône suivant l'arête qui passe par ce point; mais l'arête du point situé à l'infini est connue, puisqu'elle est parallèle au plan coupant; donc si par cette arête on mène un plan tangent au cône, l'intersection de ce plan et du plan coupant sera l'asymptote. Lorsque la section est une hyperbole, le cône a deux arêtes parallèles au plan coupant, et par conséquent deux plans tangens suivant ces arêtes, qui coupent le plan de l'hyperbole suivant deux *asymptotes*.

Le centre de l'hyperbole est déterminé par l'intersection des deux asymptotes, ou par le point de concours, du plan coupant et des deux plans tangens qui contiennent les asymptotes.

Il suit de là que les sections parallèles et hyperboliques d'un cône à base circulaire, ont leurs centres sur la droite intersection des deux plans tangens à ce cône menés par les droites de contact, parallèles au plan de l'une quelconque des sections hyperboliques.

83. *Explication des fig. 1, 1.a, 1.b, pl. 11.* Un cône droit a pour base le cercle ABCD donné sur le plan horizontal, et pour sommet le point (O, o); il est coupé par un plan (MFg), dont la trace horizontale FM est perpendiculaire à la droite XY, intersection des deux plans de projection. La trace verticale Fg coupe les droites oA', oB', limites de la projection verticale du cône, en deux points l, p, situés l'un au-dessous, et l'autre au-dessus de la projection verticale o du sommet du cône. Pour reconnaître si la courbe d'intersection s'étend à l'infini, on mène par le sommet du cône, un plan (MF'o) parallèle au plan coupant (MFg). Puisque la trace horizontale MF' coupe le cercle ABCD aux points M', S', le plan parallèle au plan coupant rencontre le cône suivant deux arêtes (OM', oF'), (OS', oF'). Ces arêtes étant parallèles au plan coupant, les points où elles rencontrent ce plan sont situés

(*) Les trois courbes, *parabole*, *hyperbole*, *ellipse*, se nomment aussi *courbes du second degré*, parce que les équations de ces courbes sont comprises dans l'équation générale du second degré entre deux variables.

à l'infini; d'où il suit que la courbe d'intersection s'étend indéfiniment vers ces points. Les plans tangens au cône, suivant les arêtes parallèles au plan coupant, rencontrent ce plan suivant deux asymptotes, qui ont pour projections horizontales les droites Tt' , Nn' respectivement parallèles aux droites OS' , OM' . Les points T et N , qui déterminent les projections horizontales des asymptotes à la section conique, sont les intersections des tangentes au cercle $M'N$, ST , et de la trace horizontale FMN du plan coupant.

La projection horizontale de la courbe d'intersection du cône et du plan, se compose de deux branches séparées SLM , GPG' , coupées à angle droit en L et P par le diamètre AB du cercle $ABCD$. On construit cette projection horizontale ainsi qu'on l'a expliqué (art. 74) pour la *fig. 1, pl. 10*.

Les branches SLM , GPG' ont pour asymptotes les droites Tt' , Nn' qui se coupent au point I du diamètre AB .

Faisant tourner le plan de la courbe d'intersection du cône et du plan autour de sa trace verticale Fg , on construit la *fig. 1.a* qui contient la courbe d'intersection $m'l's$, $g'p'g''$ dans son plan, et ses asymptotes $n'i$, $t'i$; cette construction ne diffère pas de celle de la *fig. 1.a, pl. 10*.

84. Supposons maintenant le plan coupant parallèle à un plan tangent du cône, par exemple, au plan $(AA'o)$ (*pl. 11*), qui touche le cône suivant l'arête (OA, oA') . Soient $\beta\phi$, $\pi\pi$ les traces horizontale et verticale du plan coupant, respectivement parallèles aux droites AA' , $A'o$; ce plan coupe le cône suivant une courbe dont la portion située entre le sommet et la base du cône, a pour projection horizontale $\alpha\beta\phi$. Cette courbe s'étend indéfiniment au-dessous du sommet du cône, en s'approchant continuellement du plan tangent $(AA'o)$, parallèle au plan coupant. Ces deux plans étant par hypothèse parallèles, ne se rencontreraient qu'à l'infini; d'où il suit que la section du cône n'a pas d'asymptote, quoiqu'elle s'étende à l'infini sur une nappe de la surface conique. Faisant tourner le plan de cette section autour de sa trace horizontale $\alpha\beta$ transportée parallèlement en $\alpha'\beta'$, la section appliquée sur le plan horizontal devient $\alpha'\psi'\beta'$ (*fig. 1.b*). La droite $\gamma\psi'$ est le prolongement du diamètre AB , et on a $\gamma\psi' = \pi\phi$, distance du point (ψ, π) de la section conique, à la trace horizontale $\phi\alpha\beta$ du plan de cette section.

85. La section conique (*fig. 1.a, pl. 11*), composée de deux branches qui s'étendent indéfiniment sur les deux nappes du cône, et qu'on nomme (art. 80) *hyperbole*, a deux asymptotes et un centre. La section (*fig. 1.b*) formée d'une seule branche qui s'étend indéfiniment sur l'une des nappes du cône, et qu'on nomme (art. 80) *parabole*, n'a ni centre, ni asymptote.

Il y a sur le plan d'une ellipse ou d'une hyperbole deux points très-remarquables qu'on nomme *foyers*; la parabole n'a qu'un seul foyer.

Définition des foyers des sections coniques.

86. Les foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole jouissent de cette propriété, que la somme ou la différence des droites menées de ces points vers un point de la courbe, est une quantité qui ne varie pas, quel que soit le point pris sur cette courbe. La distance constante des deux foyers, et les droites variables tirées d'un point de la courbe vers ces foyers, forment un triangle qui est dans le plan de la courbe, et dont les côtés variables se nomment *rayons vecteurs*. On exprime la propriété des rayons vecteurs par cette phrase : *La somme ou la différence des rayons vecteurs est une quantité constante.*

La détermination géométrique des foyers d'une section-conique est due à MM. Dandelin et Quetelet, de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles. (Voyez les Mémoires de cette académie, année 1825.)

Construction des foyers d'une section conique. (Pl. suppl. A, fig. 1-4.)

87. Le plan qui coupe un cône droit étant donné, un second plan mené par l'axe de ce cône perpendiculairement au premier, coupe le cône suivant deux droites SC, SD (fig. 1, pl. suppl. A), qui font avec l'axe SR' les angles égaux CSR', DSR', et le premier plan suivant une droite PQ, qui fait avec les côtés SC, SD les angles SPQ, PQD. On divise chacun de ces angles en deux parties égales, par les droites PR, QR', qui coupent l'axe SR' aux points R, R' de ces points comme centres, on décrit les deux circonférences des rayons RA, R'C, tangentes l'une aux droites PS, PQ, l'autre aux droites PQ, QD. Ces circonférences sont les grands cercles de deux sphères inscrites au cône droit, et tangentes au plan coupant PQ.; les points de contact F, F' sont les foyers de la section formée dans le cône droit par le plan PQ, perpendiculaire au plan de la section méridienne CSD du cône. Pour le démontrer, il faut faire voir que la somme des rayons vecteurs d'un point quelconque *m* de la section conique, tel que celui qui se projette en M (fig. 1), est une quantité constante. (La lettre *m* n'est pas sur la figure, parce qu'elle désigne un point de l'espace dont la position est déterminée par sa projection M sur le plan des deux droites SC, SD du cône, plan que nous supposerons horizontal.)

Soit menée la droite SM, projection horizontale de la droite Sm du cône, qui rencontre les cercles du diamètre AB, CD en des points *i*, *i'*, dont les projections horizontales sont respectivement I et I'. (Les lettres *i*, *i'* ne sont pas dans la figure, parce qu'elles désignent deux points de l'espace, situés hors du plan de projection.) Les droites mF, m*i* menées du point *m* aux points F et *i*,

sont égales, parce qu'elles partent du point m et qu'elles sont tangentes à la sphère du rayon inscrite au cône droit; par la même raison, les droites mF' , mi' tangentes à la sphère du rayon $R'C$, et menées du point m , sont aussi égales entre elles; d'où il suit que la somme des deux droites mF , mF' est égale à la somme des droites mi , mi' ; mais cette dernière somme ne dépend pas de la position particulière du point m de la section conique; elle est égale à la partie AC ou BD des droites SC , SD du cône, comprise entre les deux cercles des diamètres AB , CD ; et cette droite AC ou BD ne varie pas, quel que soit le point de la section conique d'où partent les deux rayons vecteurs. Il est donc démontré que la somme de ces rayons est une quantité constante égale en longueur à la droite AC ou BD .

La trace horizontale du plan qui coupe le cône droit étant xy , la partie PQ de cette droite, comprise entre les droites SC , SD du cône droit, est égale à la droite AC ou BD , ou à la somme des deux rayons vecteurs d'un point quelconque de la section conique. En effet, on a :

$$AC = AP + PC = BD = BQ + QD.$$

Mais $AP = PF$, $PC = PF'$, $BQ = QF$, $QD = QF'$; donc :

$$PF + PF' = QF + QF' = FF' + 2PF; \quad QF + QF' = FF' + 2QF'; \quad \text{d'où } PF = QF':$$

$$\text{Donc } AC = PF + PF' = PF + FF' + QF' = PQ.$$

88. Les mêmes démonstrations s'appliquent au cylindre droit à base circulaire (*fig. 2, pl. suppl. A*). Le plan $ABCD$ mené par l'axe du cylindre perpendiculairement au plan de la section cylindrique, coupe ce plan suivant la droite xy , et le cylindre suivant les parallèles AC , BD , qui sont rencontrées par la droite xy aux points P et Q . Les droites PR , QR' qui divisent en deux parties égales les angles APQ , DQP , coupent l'axe RR' du cylindre aux points R , R' centres des sphères inscrites au cylindre, et tangentes au plan coupant xy . Les points de contact F , F' des sphères et du plan, sont les foyers de la section cylindrique. Désignant comme pour le cône droit par m un point de la section cylindrique, par i , i' les points où la droite du cylindre menée par le point m rencontre les cercles du cylindre des diamètres AB , CD , et supposant que les points m , i , i' hors du plan de projection, se projettent sur ce plan en M , I , I' , les droites mi , mi' sont égales et parallèles à leurs projections MI , MI' (*fig. 2*), et on a $mF = MI$, $mF' = MI'$; donc la somme des rayons vecteurs $mF + mF' = MI + MI'$, est égale à la droite AC , dont la longueur ne varie pas, quelle que soit la position du point m de la section du cylindre par le plan xy . On a aussi comme pour le cône droit $PQ = AC$.

89. Si l'on suppose (*fig. 3*) que le cône droit est coupé par le plan xy suivant une hyperbole, on construira comme pour le cas de l'ellipse les deux

foyers F, F' , dont la distance FF' est égale à $2SP$ ou $2SQ$. Pour un point quelconque m de l'hyperbole, dont la projection (*fig. 4*) est M , ce n'est pas la somme, mais la différence des rayons vecteurs de ce point, ou $mF' - mF$, qui sera égale à la droite PQ , partie de la trace xy , comprise entre les côtés SA, SD du cône droit.

90. Lorsque la section conique est (*fig. 4*) une parabole, ce qui a lieu si l'intersection xy des plans rectangulaires PQ et ASB est parallèle à la droite SB du cône, la construction précédente ne donne pour la parabole qu'un seul foyer F , qui est le point où la sphère inscrite au cône suivant le cercle du diamètre AB , touche le plan coupant; l'autre foyer est à l'infini; un point quelconque de la parabole n'a qu'un seul rayon vecteur.

Troisième exemple. — Intersection d'un cylindre oblique par un plan perpendiculaire à ses arêtes. (Pl. 12, fig. 1, 1.a.)

91. La trace du cylindre sur le plan horizontal est donnée; on connaît la direction de sa droite génératrice; le plan coupant est déterminé par ses traces sur les plans de projection.

Concevant une suite de plans parallèles à la droite génératrice, qui coupent la surface cylindrique et le plan donné, l'un quelconque de ces plans contient une droite du plan et une ou plusieurs droites du cylindre; les points d'intersection de ces droites appartiennent à la courbe d'intersection du cylindre et du plan.

Un système de plans n'est pas déterminé par la seule condition d'être parallèle à une droite; on peut encore supposer qu'ils sont perpendiculaires à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple. La *fig. 1, pl. 12*, est construite dans cette hypothèse, et avec les données suivantes.

92. Soit $ABCD$ (*fig. 1, pl. 12*) la base ou la trace du cylindre sur le plan horizontal; la droite génératrice de ce cylindre est constamment parallèle à une droite donnée ($\alpha\beta, \gamma\delta$). Le plan coupant a pour traces sur les plans de projection les droites LM, Mm qui se coupent au M de la commune intersection XY de ces plans.

La base $ABCD$ étant une ellipse, on lui mènera les deux tangentes CG, DF parallèles à la projection horizontale $\alpha\beta$ de la droite donnée ($\alpha\beta, \gamma\delta$); ces parallèles seront les limites de la projection horizontale du cylindre. Deux autres tangentes AA', BB' , perpendiculaires à la droite XY , détermineront sur cette droite deux points A', B' , par lesquels menant des parallèles à la projection verticale $\gamma\delta$ de la droite donnée ($\alpha\beta, \gamma\delta$), on aura les limites $A'k, B'i$ de la projection verticale du cylindre. Un plan horizontal hi coupe le cylindre

suivant une ellipse égale à sa base, et cette ellipse se projette sur le plan horizontal en GFI. Les droites CG, DF sont tangentes aux deux ellipses égales ABCD, GFI, et les touchent en des points semblablement placés. La droite O_w , qui joint les centres de ces ellipses, est parallèle aux tangentes CG, DF.

Le plan vertical mené par la droite O_w coupe le plan donné (LMm) suivant une droite dont la projection verticale est $P'n$. Le point P' est la projection verticale du point P de la trace LM. On obtient le second point n de la projection $P'n$, en menant une droite quelconque (NM' , nm) parallèle à LM. Considérant cette droite comme une horizontale du plan coupant (LMm), elle a pour projection verticale la parallèle mn à XY. La perpendiculaire à XY, menée par le point N, coupe l'horizontale mn au point cherché n . Tous les plans verticaux parallèles au plan vertical O_w ou à la droite $\alpha\beta$, couperont le plan donné (LMm) suivant des parallèles à la droite (PN, P'n).

93. La courbe d'intersection du cylindre et du plan à deux projections HTQ, *htq* que nous allons construire.

Soit ER une droite quelconque parallèle à $\alpha\beta$, qui coupe la base donnée ABCD du cylindre aux points E, e, et la trace horizontale LM du plan coupant au point R; on considère cette droite ER comme la trace horizontale d'un plan vertical qui contient une droite du plan coupant et deux arêtes du cylindre. Abaisant les perpendiculaires EE' , ee' , RR' sur XY, on mènera par les points E' , e' , les parallèles $E't$, $e'v$ à la droite $\gamma\delta$, qui seront coupées aux points t , v par la droite $R'v$ parallèle à P'n.

Ces points t , v appartiennent à la courbe *htqv*, projection verticale de la courbe d'intersection du cylindre et du plan donnés. Abaisant les perpendiculaires tT , vV à XY, qui coupent la droite ER aux points T et V, ces points appartiennent à la projection horizontale HTQV de la courbe d'intersection. On trouvera de la même manière tant de points qu'on voudra, tels que (T, t) et (V, v) de cette courbe. Pour la construire dans son plan, on fait tourner ce plan autour de sa trace horizontale LM comme charnière. Un point quelconque (T, t) décrit une circonférence du rayon (TR, tR'), qui a pour longueur l'hypothénuse d'un triangle rectangle construit sur TR et $T't$ comme côtés; portant cette longueur de R en θ , le point θ sera après la rotation, le point (T, t) appliqué sur le plan horizontal. On construit de la même manière tout autre point de la section du cylindre, laquelle devient dans le plan de cette section, la courbe $H'U'\theta Q'$. Cette courbe se nomme la *section droite* du cylindre, lorsque le plan coupant est perpendiculaire à la génératrice de la surface cylindrique; auquel cas, les traces LM, Mm de ce plan sont respectivement perpendiculaires (art. 21) aux projections de la droite donnée ($\alpha\beta$, $\gamma\delta$).

Des tangentes à la courbe d'intersection du cylindre oblique et d'un plan.

94. Ayant construit (fig. 1, pl. 12) les projections T, t d'un point quelconque de la courbe d'intersection du cylindre par un plan, et ce point θ sur le plan même, les tangentes en ces mêmes points aux trois courbes $HTQV$, $htqv$, $H'U'Q'$, sont déterminées; et pour les obtenir il suffira de construire l'intersection du plan tangent au point (T, t) du cylindre, et du plan donné (LMm) .

Le plan tangent au point (T, t) du cylindre passe par l'arête (TE, tE) (art. 53) et touche le cylindre suivant cette arête; d'où il suit qu'il a pour trace horizontale la tangente EL à l'ellipse $ABCD$: or cette tangente coupe la trace LM au point L ; donc ce point L est sur la tangente de la courbe d'intersection du cylindre et du plan, au point (T, t) de cette courbe. Élevant la perpendiculaire LL' à XY , et tirant les droites $sLT, L't$, on aura les tangentes des courbes $HTQV$, $htqv$ aux points T et t de ces courbes. Lorsque le plan tourne sur sa trace horizontale LM comme charnière, le point L de la tangente est fixe; le point (T, t) s'applique en θ sur le plan horizontal; donc la droite LQ est la tangente au point θ ou (T, t) de la courbe d'intersection du cylindre et du plan.

Les tangentes à la base du cylindre CG, DF , ne sont pas seulement les projections horizontales de deux arêtes du cylindre, on peut encore les considérer comme les traces de deux plans tangens verticaux; d'où il suit que toute courbe du cylindre qui rencontrera les droites de ce cylindre contenues dans les plans verticaux CG, DF , aura pour tangentes aux points de rencontre, des droites dont les projections horizontales sont CG et DF .

Par la même raison, les limites $A'k, B'i$ de la projection verticale du cylindre, sont des tangentes des projections verticales de toutes les lignes courbes du cylindre qui rencontrent les droites de ce cylindre, dont $A'k, B'i$ sont les projections verticales.

Les plans verticaux CG, DF tangens au cylindre, rencontrent le plan coupant (LMm) suivant des tangentes à la courbe d'intersection du cylindre; donc les projections verticales $G'h, F'q$ de ces tangentes, sont tangentes à la projection verticale htq de la courbe d'intersection du cylindre par le plan (LMm) . Les droites $G'h, F'q$ menées par les points G', F' projections verticales des points G, F , sont parallèles à la droite $P'n$.

Les plans tangens au cylindre, parallèles à une horizontale du plan coupant (LMm) , touchent le cylindre suivant deux arêtes, qui sont coupées par le plan en deux points; les tangentes à la courbe d'intersection menées par ces points sont horizontales, et leurs projections verticales 12, 34 sont aussi des horizontales. Après avoir considéré plusieurs surfaces développables particulières, revenons au cas général.

Des tangentes aux sections planes des surfaces développables, parallèles à des droites données.

95. Une droite étant donnée dans le plan d'une courbe de la surface développable, on mènera un plan tangent à la surface, parallèle à cette droite; l'intersection de ce plan et du plan de la courbe sera évidemment une tangente de cette courbe parallèle à la droite donnée. On a vu (art. 56 et 60) comment on construit un plan tangent aux surfaces cylindrique et conique, parallèle à une droite donnée.

Quelle que soit la surface développable, on déterminera le plan tangent à cette surface, qui est parallèle à une droite donnée, en menant un plan quelconque parallèle à cette droite, qui coupe la surface suivant une courbe. La tangente à cette courbe parallèle à la droite donnée, et la droite de la surface développable qui passe par le point de contact, déterminent le plan tangent demandé.

Quant aux tangentes des projections d'une section plane de la surface développable proposée, on pourra, par la même considération, déterminer celles qui sont parallèles à des droites données sur les plans de projection. On mènera par l'une de ces droites un plan perpendiculaire au plan de projection sur lequel elle est donnée; ce plan rencontre le plan de la courbe suivant une droite. En menant un plan tangent à la surface développable parallèle à cette droite, les projections de la droite intersection du plan tangent et du plan coupant, seront tangentes aux deux projections de la courbe, et l'une de ces tangentes sera parallèle à la droite donnée.

Des lignes d'une surface développable, rapportées sur le plan de développement.

96. On a vu (art. 50) que les élémens d'une surface développable pouvaient être réunis sur un seul et même plan, et former ce qu'on appelle le *développement* de la surface.

Une ligne quelconque de cette surface, celle par exemple qui résulte de l'intersection de la surface par un plan, se transforme sur le développement en une autre courbe; nous allons exposer le principe qui sert de base à la construction de cette courbe.

Lorsqu'on développe une surface, une ligne quelconque de cette surface plane ou à double courbure devient sur le plan de développement, une autre ligne que je nomme *la transformée* de la première.

Supposons d'abord qu'il y ait sur la surface développable une courbe dont la transformée soit connue, et pour la distinguer, nommons-la *axe de développement*. La section droite sur le cylindre à base circulaire, le cercle sur le cône droit, la ligne dont tous les points sont à la même distance du sommet du cône oblique, sont sur ces diverses surfaces, les lignes qu'on prend pour *axes de développement*; les transformées de ces axes sont la ligne droite ou le cercle.

97. L'axe de développement et sa transformée étant connus, il n'y a aucune ligne de la surface développable dont on ne puisse construire la transformée sur le plan de développement. En effet, chaque tangente de l'axe de développement fait avec la droite de la surface développable qui passe par le point de contact, un angle déterminé; or cet angle ne change pas sur le plan de développement; d'où il suit qu'il n'y a aucun point de la surface développable qui ne soit déterminé par une abscisse courbe comptée sur l'axe de développement, et par une ordonnée rectiligne qui est la droite de la surface passant par l'extrémité de l'abscisse courbe.

98. Considérant sur une surface développable, une ligne autre que l'axe de développement, on aura la transformée de cette ligne, en rapportant sur le plan de développement, les droites de la surface développable comprises entre la ligne que l'on considère et l'axe de développement. Si, par un point de cette ligne, on lui mène une tangente, cette tangente, la droite de la surface développable qui passe par le point de contact, et la tangente à l'axe de développement, mené par le point où la droite de la surface coupe cet axe, forment un triangle qui est situé dans le plan tangent à la surface développable, et qui ne change pas de grandeur dans le plan de développement; donc, connaissant dans ce triangle un côté et deux des cinq autres éléments qui le déterminent, on pourra le construire sur le plan de développement.

99. Lorsque l'axe de développement devient une ligne droite sur le plan de développement, toutes les tangentes à cet axe, rapportées sur le même plan, coïncident avec la droite qui est la transformée de l'axe. Dans ce cas, l'axe de développement est une courbe de la surface développable, qui jouit de cette propriété, d'être la ligne la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface, entre deux points quelconques de son périmètre.

Une surface développable étant exécutée, on y trace une ligne de cette espèce (la plus courte entre deux points), en pliant un ruban mince, flexible, d'une largeur égale dans toute longueur, de manière qu'il s'applique entièrement sur la surface; chaque droite formant le bord du ruban, devient sur la surface la ligne la plus courte entre deux quelconques de ses points: sachant mener des tangentes à cette ligne, on pourra la prendre pour axe de développement.

100. Il suit de ce qui précède, que pour obtenir le développement d'une surface, il faut connaître sur cette surface un *axe* de développement, et sur le plan de développement la transformée de cet axe. Les droites consécutives de la surface qui rencontrent l'axe sous des angles déterminés et connus, le divisent en petits arcs qui ne diffèrent pas sensiblement de la ligne droite; les points de division de cet axe correspondent à d'autres points de la transformée, et on obtient les points correspondans en rapportant les petits arcs de l'axe sur sa transformée, dans l'ordre où ils se succèdent sur la surface. Sachant mener des tangentes à ces deux courbes, savoir à l'axe de développement et à sa transformée, ces tangentes déterminent sur le plan de développement les droites de la surface développable; donc on aura sur ce plan la transformée de l'axe de développement, qui sera une ligne d'abscisses, et les droites de la surface développable, qui seront les ordonnées correspondantes des points de cette surface, qu'il s'agit de rapporter sur le plan de développement.

101. Le développement d'une surface a principalement pour objet dans les arts, de tracer au moyen de patrons ou panneaux, sur cette surface déjà exécutée, une courbe autre que l'axe de développement; or, deux courbes suffisent pour diriger le mouvement de la droite génératrice d'une surface réglée ou développable, lorsque les points d'appui de chaque droite sur les courbes directrices sont déterminés (art. 52 et 61); d'où il suit que la surface étant exécutée, le développement n'est qu'un moyen secondaire pour y rapporter une courbe, qui est donnée par ses projections; car on peut tracer directement cette courbe par points en déterminant ces points par leurs distances aux courbes directrices, mesurées sur les droites de la surface.

EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENT DE SURFACES.

Premier exemple. — Développement du cylindre droit. (Pl. 9.)

102. Quelle que soit la base d'un cylindre, la section perpendiculaire à ses arêtes, qu'on nomme (art. 93) *la section droite*, ou *l'arc droit*, se transforme sur le développement en une ligne droite; car les droites ou arêtes du cylindre, parallèles entre elles, conservant leur parallélisme sur le plan de développement, la ligne qui les coupe à angle droit est nécessairement une droite. Prenant donc la section droite du cylindre pour l'axe de développement, la transformée de cette section sera, sur le plan de développement, une ligne droite, et on demande la transformée de la section du cylindre (art. 69); par le plan (Efg), (fig. 1, pl. 9).

103. *Explication de la fig. 2, pl. 9.* On prend pour plan de développement, le plan tangent au cylindre, qui coupe le plan de la section droite de ce cylindre suivant une droite AA' , parallèle à la trace horizontale EF du plan (*fig. 1*). Ce plan de développement coupe la trace verticale Fg (*fig. 1, pl. 9*) au point a , par lequel on mène la section droite du cylindre (ab' , $ABCD$). Ayant tiré (*fig. 2*) la droite BB' de même longueur que la circonférence $ABCD$, on prend sur cette droite le point A pour représenter le point (A, a) (*fig. 1*) du cylindre. AB et AB' (*fig. 2*) sont les transformées des demi-circonférences $AHCB$, $AIDB$ (*fig. 1*); ces demi-circonférences ayant été divisées en un assez grand nombre de parties égales, pour que chaque partie puisse être considérée comme une ligne droite, on a rapporté les points de division à droite et à gauche du point A , en AHB , et $AH'B'$ (*fig. 2*).

Les perpendiculaires à la droite BB' élevées par ces points de division, sont les arêtes du cylindre rapportées sur le plan de développement; on les considère aussi comme les ordonnées des lignes courbes tracées sur le cylindre, qu'il s'agit de rapporter sur le même plan.

Soit (H, h) (*fig. 1*) un point quelconque du cylindre; prenant l'arc AH (*fig. 1*) pour l'abscisse de ce point, et la longueur hj pour l'ordonnée, on rapportera ce point sur le plan de développement, en faisant la droite AH (*fig. 2*) égale à l'arc AH (*fig. 1*) rectifié, et la perpendiculaire Hh (*fig. 2*) sur AH , égale à jh (*fig. 1*). Le point h (*fig. 2*) représente sur le plan de développement le point (H, h) (*fig. 1*) du cylindre. On trouvera de la même manière tous les autres points de l'intersection du cylindre par le plan (EFg), et cette intersection ($ABCD$, ab') (*fig. 1*) aura pour sa transformée (*fig. 2*) la courbe $bAh'b'$. Cette courbe ne s'arrête pas aux points b, b' ; elle s'étend à l'infini entre les deux parallèles BB', bb' , qui la touchent aux points A, b, b' ; elle se compose d'une infinité de branches égales à bAb' , qui correspondent à la section oblique fermée ($ABCD$, ab') (*fig. 1*) du cylindre. En effet, on peut concevoir que ce cylindre est enveloppé par une toile sans épaisseur, qui fait une infinité de révolutions autour de sa surface. En déroulant la toile, la section oblique qui est la même sur toutes les enveloppes superposées, se transforme évidemment en autant de lignes égales à bAb' , qu'il y a de révolutions.

La portion de courbe bAb' étant appliquée sur le cylindre, de manière que la droite Aa (*fig. 2*) coïncide avec l'arête du cylindre ($A, A'a$) (*fig. 1*), les extrémités b, b' de la courbe bAb' (*fig. 2*), se réuniront au point unique (B, b) (*fig. 1*) de la section oblique du cylindre, et les extrémités β, β' de la droite $a\beta\beta'$ (*fig. 2*), coïncideront avec le point B de la section droite $ABCD$.

De la tangente à la transformée d'une ligne courbe tracée sur le cylindre.

104. Ayant mené par le point H (*fig. 1*) du cercle $ABCD$, la tangente $l.HK$ qui coupe la droite AA' prolongée au point K , la tangente de la section oblique du cylindre au point (H, h) (*fig. 1*) est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, qui a pour côtés les droites HK et jh . Ce triangle est dans le plan tangent du cylindre au point (H, h) : or ce plan se confond (*fig. 2*) avec le plan de développement, et le point (H, h) (*fig. 1*) avec le point h de ce développement. Ainsi la longueur de l'arête hH (*fig. 2*) étant égale à hj (*fig. 1*), et portant HK (*fig. 1*) en HK (*fig. 2*) sur la droite BB' , on aura sur le plan de développement le triangle rectangle HhK , dont l'hypothénuse hK est la tangente de la courbe bAB' (*fig. 2*) au point h .

Second exemple de développement de surface. — Développement du cône droit.
(Pl. 10.)

105. Un cercle quelconque du cône droit a pour transformée sur le plan de développement un autre cercle, dont le rayon est égal à une droite du cône, comprise entre le sommet et le plan du premier cercle. En effet, toutes les droites comprises entre le sommet et un cercle quelconque du cône droit, sont de même longueur : or ces droites ne changent pas de longueur sur le plan de développement ; donc leurs extrémités appartiennent à une circonférence de cercle.

106. *Explication de la fig. 2, pl. 10.* Soit $ABCD$ (*fig. 1*) le cercle du cône droit, qu'on prend pour axe de développement. La portion d'arête du cône comprise entre le sommet et le cercle $ABCD$, est évidemment égale à oA' ou oB' ; donc si d'un point O (*fig. 2*) comme centre, avec OB, oB' (*fig. 1*) pour rayon, on décrit une circonférence ABA' (*fig. 2*), cette ligne sera la transformée du cercle $ABCD$ (*fig. 1*). Les parties égales de la circonférence rapportées sur la transformée, sont les bases des secteurs de cercle élémens du cône, et les rayons de ces secteurs représentent les arêtes du cône sur le plan de développement. Prenant OB (*fig. 2*) pour représenter l'arête du cône (OB, oB') (*fig. 1*), le point (P, p) (*fig. 1*) de l'intersection du cône par le plan (EFG) (art. 74), qui se trouve sur cette arête, s'appliquera (*fig. 2*) en p , extrémité de la droite OP (*fig. 2*), égale à op (*fig. 1*). Les arcs BA et BA' (*fig. 2*), étant égaux aux demi-circonférences rectifiées BCA, BDA (*fig. 1*), les droites OA, OA' (*fig. 2*) représentent l'arête (OA, oA') (*fig. 1*) ; portant sur ces droites la longueur ol (*fig. 1*) de O en l (*fig. 2*), et de O en l' , les points l, l' (*fig. 2*)

correspondent au point unique (L, l) (*fig. 1*) de la courbe d'intersection du cône et du plan.

Achevant la circonférence du rayon OB , (*fig. 2*), la courbe lpl se répètera une infinité de fois sur le plan de développement autour du point O , à moins que l'arc ABA' ne soit une partie aliquote de la circonférence à laquelle cet arc appartient. Dans ce dernier cas, la courbe fermée résultant de l'intersection du cône par un plan, aura pour transformée une autre courbe aussi fermée; mais en général, la transformée fera une infinité de révolutions autour du point O .

La portion lpl' de la transformée suffit pour tracer sur le cône l'intersection de ce cône par le plan (EEg) (*fig. 1*). Ayant décrit la *fig. 2* sur un plan flexible, telle qu'une feuille de carton ou de papier, on mettra la droite OB de cette figure sur l'arête (OB, oB') du cône, et on appliquera le plan de la figure sur le cône; les points l et l' de cette figure se réuniront au point (L, l) (*fig. 1*) du cône.

107. Soit maintenant une droite quelconque OH (*fig. 2*), qui représente l'arête du cône (OH, oH') (*fig. 1*); on aura le point M de la courbe lpl (*fig. 2*), qui se trouve sur cette arête, en construisant la longueur OM de la droite comprise entre le sommet (O, o) et le point (M, m) (*fig. 1*). Pour avoir la tangente ME menée par le point M (*fig. 2*) à la courbe lpl , on remarquera qu'elle est l'hypothénuse d'un triangle rectangle MHE , dont le côté HE (*fig. 2*) est égal à HE (*fig. 1*). Ce triangle est situé dans le plan tangent au cône au point (M, m) (*fig. 1*), dont la trace horizontale est HE , et les longueurs des côtés de ce triangle, ainsi que les dimensions des droites situées dans les plans tangens au cône, ne changent pas sur le plan de développement, puisque c'est sur ce plan que viennent s'appliquer tous les plans tangens.

108. Explication de la *fig. 2*, *pl. 11*. Le développement du cône droit, qui a pour base le cercle $ABCD$, et pour sommet le point (O, o) (*pl. 11*), se fait de la même manière que pour la *fig. 2*, *pl. 10*. La droite OB (*fig. 2*) représente l'arête du cône (OB, oB') (*fig. 1*, *pl. 11*), et les droites OA, OA' correspondent à l'arête unique (OA, oA') (*fig. 1*). La branche d'hyperbole $(MLS, l'l')$ (*fig. 1*) a pour transformée les deux portions de courbes $lM, l'S$ (*fig. 2*). La transformée de la seconde branche (GPG', pg) (*fig. 1*) de l'hyperbole, est (*fig. 2*) la courbe GpG' .

109. On rapporte sur le plan de développement les asymptotes de l'hyperbole (art. 82) en les considérant comme des tangentes en des points situés à l'infini. Soient OM', OS' (*fig. 2*) les droites qui représentent les arêtes du cône parallèles au plan de l'hyperbole. Les perpendiculaires $M'N, S'T$ (*fig. 2*) aux extrémités des rayons OM', OS' , étant respectivement égales aux droites

M'N, ST (*fig. 1, pl. 11*), terminées aux points N; T des droites projections horizontales des asymptotes, les parallèles NN', TT' (*fig. 2*) aux rayons OM', OS' seront les transformées des asymptotes, qui deviennent elles-mêmes les asymptotes de la transformée de l'hyperbole. Cette transformée est une courbe formée de trois branches séparées l'M, l'S, GpG'. Les deux droites NN', TT' sont asymptotes de la branche GpG', et chacune d'elles n'est asymptote que d'une seule des autres branches l'M, l'S.

Troisième exemple de développement de surface. — Développement du cylindre oblique. (Pl. 12, fig. 2.)

110. Lorsque le cylindre à développer est oblique, on doit d'abord construire sa section droite (art. 93), c'est-à-dire l'intersection de ce cylindre par un plan perpendiculaire à ses arêtes. Soit (HTQ, *htq*) (*pl. 12, fig. 1*), la section droite du cylindre elliptique, qui a pour base sur le plan horizontal l'ellipse ABCD; ayant divisé cette ellipse en arcs qui sous-tendent des cordes égales, les arêtes du cylindre menées par les points de division, rencontrent la section droite ou l'arc droit en des points qui sont connus, et qu'on peut rapporter sur la droite, transformée de l'arc droit; ce qui détermine sur le plan de développement la position respective des arêtes du cylindre, dont on a les projections horizontale et verticale.

Soit *zs'* (*fig. 2*) la droite qui est sur le plan de développement, la transformée de l'arc droit qu'on prend pour axe de développement, et *Ee* (*fig. 2*) l'arête du cylindre (ET, E't) (*fig. 1*); la portion *Ee* (*fig. 2*) de cette arête, comprise entre l'arc droit et la base, a pour projections (*fig. 1*) les droites ET, E't. Déduisant de ces deux projections sa longueur vraie, et portant cette longueur sur *ee*, le point E sur le plan de développement (*fig. 2*) appartiendra à la courbe UEZZ' transformée de l'ellipse ABCD (*fig. 1*). On construirait de la même manière tout autre point d'une ligne quelconque du cylindre, qui se trouverait sur l'arête (ET, E't).

111. Pour trouver la longueur vraie d'une arête du cylindre qui a pour projections CH, C'h, on décrit du point H, comme centre, un arc de cercle C_φ qui coupe la parallèle H_φ à XY au point φ. Abaisant les perpendiculaires HH'h, φφ' sur XY, le pied φ' de la seconde perpendiculaire détermine le triangle rectangle φH'h, dont l'hypothénuse hφ' est la longueur vraie de l'arête (CH, C'h). On obtiendrait plus directement les longueurs des arêtes du cylindre en se servant d'une nouvelle projection sur un plan perpendiculaire au plan coupant, et parallèle à la génératrice du cylindre. Soit O_u (*fig. 1*), la trace horizontale de ce plan; en le faisant tourner sur sa trace comme char-

nière, et l'appliquant sur le plan horizontal, on aura la *fig. 1.a*, dans laquelle les arêtes Uu , Zz sont rencontrées à angle droit par la droite Pzu du plan coupant, aux points u , z , dont les projections horizontales sont U' , Z' .

Soient Uu , Zz ou $Z'z'$, les droites (*fig. 2*) qui représentent les arêtes du cylindre situées dans le plan vertical Ou (*fig. 1*), on aura les points U et Z (*fig. 2*) de la transformée de l'ellipse $ABCD$ (*fig. 1*) en faisant Uu (*fig. 2*) $= Uu$ (*fig. 1.a*), Zz ou $Z'z'$ (*fig. 2*) $= Zz$ (*fig. 1.a*). On aurait de même le point E déjà construit, en faisant Ee (*fig. 2*) $= Ee$ (*fig. 1.a*).

De la tangente à la transformée de la base elliptique du cylindre oblique.

112. Ayant construit le point E de la transformée ZUZ (*pl. 12, fig. 2*) de l'arc droit du cylindre oblique, on obtiendra la tangente en un point quelconque E de cette transformée, en portant la tangente Ll de l'arc droit développé $H'U'Q'$ (*pl. 12, fig. 1*), sur la droite zz' (*fig. 2*) de e en l ; la droite El (*fig. 2*) est la tangente de la transformée ZZU au point E de cette courbe.

§ III. DES SURFACES DE RÉVOLUTION COUPÉES PAR UN PLAN.

113. Deux séries de plans, les uns perpendiculaires à l'axe de révolution, les autres passant par cet axe, coupent la surface de révolution suivant des cercles ou des méridiens. Chacun de ces plans rencontre le plan donné qui coupe la surface suivant une droite; le point ou les points dans lesquels cette droite coupe le cercle ou la section méridienne, contenu dans le même plan que la droite, appartiennent à la courbe d'intersection de la surface de révolution et du plan donné.

Premier exemple. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution par un plan.

(*Pl. 13, fig. 1.*)

114. On suppose que l'axe de révolution est vertical, et que le plan vertical de projection est perpendiculaire au plan coupant.

Soit $(O, O'o)$ l'axe de révolution; Lm , mn , les deux traces du plan coupant; un plan méridien AOB parallèle au plan vertical de projection, contient l'ellipse méridienne $abef$, qui a pour axes principaux les droites rectangulaires ab , ef . Cette ellipse, en tournant autour de son grand axe ef , dirigé suivant la droite $(O, O'o)$, engendre l'ellipsoïde de révolution.

Le plus grand cercle de cette surface a pour diamètre ab , et se projette sur le plan horizontal, suivant un cercle $ABCD$ de même diamètre.

La trace horizontale Ln du plan coupant étant perpendiculaire à l'intersection XY des plans de projection, la trace verticale mn contient évidemment la projection verticale de la courbe d'intersection de la surface de révolution et du plan donné (Lmn).

Pour trouver un point de la projection horizontale de cette intersection, on imaginera un plan ss' perpendiculaire à l'axe de révolution; ce plan coupera le plan donné suivant une horizontale (RR' , r), et la surface suivant un cercle du diamètre ss' , qui se projette sur le plan horizontal suivant un autre cercle $RR'S$ de même diamètre. Ce dernier cercle et la droite RR' se coupent aux points R , R' qui appartiennent à la projection horizontale $RR'UZ$ de la courbe d'intersection de l'ellipsoïde de révolution par le plan donné (Lmn).

115. On aurait cette courbe dans son plan (*fig. 1.a*), en faisant tourner chacun de ces points autour de la trace mn comme charnière. Un point tel que (R, r) décrit un cercle d'un rayon égal à la distance Rr' du point R à la droite XY ; portant cette distance (*fig. 1.a*) de r en ρ sur la perpendiculaire rp à la trace mn , le point ρ appartient à la courbe développée sur son plan.

Le plan méridien AB parallèle au plan vertical de projection, rencontre le plan (Lmn), suivant une droite qui passe par le point I de la trace Ln de ce dernier plan. Portant mI en mI' sur la perpendiculaire à la trace mn , et menant par le point I' la parallèle $I'n$ (*fig. 1.a*) à mn , cette parallèle divisera en parties égales les ordonnées telles que $\rho\rho'$, perpendiculaires à la trace mn ; en sorte qu'on aura $np = n\rho' = NR = NR'$.

116. En considérant sur la surface de révolution le second système de lignes, c'est-à-dire les courbes méridiennes, les points de rencontre de ces courbes avec le plan donné appartiendront à l'intersection de la surface et du plan.

Soit OP la trace horizontale d'un plan méridien qui coupe le plan donné (Lmn) suivant une droite (PO , mn), et la surface de révolution suivant une courbe méridienne égale à $abfe$. Pour construire le point d'intersection de cette courbe et de la droite (PO , mn), on fait tourner le méridien OP autour de l'axe de révolution, et on amène le point P en P' sur le diamètre AB prolongé. Le point P' se projette sur le plan vertical en p ; l'axe de révolution rencontre le plan donné (Lmn) au point k ; tirant la droite pk qui coupe la section méridienne $abfe$ aux points s' , u , les distances $s't$, ut de ces points à l'axe ef , rapportées sur la droite OP de O en R et de O en U , détermineront les points R et U de la projection horizontale $RR'UZ$ de la ligne d'intersection demandée.

La circonférence décrite du point O comme centre, avec OP pour rayon, rencontre la trace Ln aux points P et Q ; tirant la droite OQ , et la considérant comme la trace d'un autre plan méridien OQ , on aura deux nouveaux points de la projection $RR'U'$, en faisant $OR' = OR$, et $OZ = OU$.

De la tangente à la courbe d'intersection d'une surface de révolution par un plan.

117. Le plan tangent à la surface de révolution, mené par un point de la ligne d'intersection de cette surface par un plan, rencontre le plan coupant suivant une droite, qui est une tangente de la courbe d'intersection.

Soit (R, r) un point quelconque de la courbe d'intersection de la surface par un plan; le plan tangent en ce point passe par les tangentes à la courbe méridienne et au cercle, qui se coupent à angle droit en ce même point; mais les tangentes aux courbes méridiennes, menées par les points du cercle du diamètre ss' , qui passe par le point donné (R, r) , forment un cône droit qui est coupé par le plan horizontal XY de projection, suivant le cercle du rayon $OG = O'g$; d'où il suit que la tangente à la courbe méridienne au point (R, r) de cette courbe, rencontre le plan horizontal XY au point G . D'ailleurs (art. 21), la trace horizontale GH du plan tangent est perpendiculaire à la trace ORP du plan méridien qui passe par le point de contact (R, r) ; menant cette perpendiculaire, elle rencontre la trace horizontale Ln du plan donné, au point H qui détermine la tangente HR . Portant mH en mH' (fig. 1.a), la droite $H'p$ est la tangente à la courbe de l'ellipsoïde, rapportée sur le plan de cette courbe (fig. 1.a).

Deuxième exemple de l'intersection d'une surface de révolution par un plan.

— *De l'intersection, du tore, ou de la surface annulaire par un plan.*

(Pl. 14.)

118. On appelle *tore*, ou surface annulaire, la surface engendrée par un cercle, qui tourne autour d'une droite située dans le plan du cercle. Cette droite est l'axe de révolution; on la suppose verticale sur la figure de la pl. 14, que nous allons expliquer.

Soit (A, aa') l'axe de révolution, qui est donné dans le plan vertical AEF du cercle $dd'ef$, dont la projection horizontale est la droite EF ; ce cercle a son centre en C sur le plan horizontal de projection, et pour diamètre la droite (EF, ef) . On suppose que le tore est coupé par un plan vertical GEH perpendiculaire à la droite AF , et passant par le point (E, e) situé sur le diamètre horizontal du cercle générateur, parallèle au plan vertical de projec-

tion; la courbe d'intersection a pour projection horizontale la droite GH. Pour développer cette courbe dans son plan, on fait tourner le plan vertical GH autour de sa trace horizontale GH comme charnière. La distance d'un point quelconque de la courbe à la charnière, mesurée sur une verticale, s'abat sur une droite de même longueur, perpendiculaire à EG.

Ayant décrit du point A comme centre, avec un rayon quelconque $A\pi$, un cercle qui coupe la droite AF au point π , la perpendiculaire πp menée par ce point à XY, rencontre le cercle générateur du tore $dd'ef$, aux points q, q' qui sont les projections verticales des deux points du tore, situés sur la verticale π . Mais le cercle du tore qui a pour projection horizontale $P'\pi P$, rencontre le plan vertical GH aux points dont P et P' sont les projections horizontales; donc la hauteur de ce point du tore au-dessus du plan horizontal de projection, sera égale à pq , ou pq' . Ayant élevé la perpendiculaire QPQ' sur GH, on prend $PQ = PQ' = pq$, et les points Q, Q' appartiennent à la courbe d'intersection du tore et du plan. Les points K, K' de cette courbe, dont l'ordonnée verticale KI ou K'I est égale au rayon du cercle générateur du tore, appartiennent au cercle horizontal du rayon AC, décrit par le centre (C, c) du cercle générateur autour de l'axe de révolution. La courbe développée dans son plan se compose de deux branches égales, GKQE'H et H'AEQ'K'G, qui se croisent au point double E. (Voyez pour la détermination des tangentes à cette courbe au point double E, mon deuxième Supplément à la Géométrie descriptive de Monge, page 11, in-4^o, année 1818.)

119. La section du tore que nous venons de construire, forme le passage des sections parallèles à deux branches séparées, de celles qui sont à une seule branche. Toutes les sections du tore comprises entre le plan méridien ZZ' et le plan coupant GH, sont à deux branches séparées. Toutes les sections comprises entre le plan coupant GH et le plan tangent parallèle mené par le point F, n'ont qu'une seule branche.

De la tangente à la courbe d'intersection du tore et d'un plan parallèle à son axe.

120. GH étant la trace horizontale du plan coupant, parallèle à l'axe du tore, et P la projection horizontale d'un point de la courbe d'intersection, la hauteur de ce point au-dessus du plan horizontal est la droite PQ d'une longueur égale à pq ou pq' ordonnée verticale du cercle $dd'ef$. Un plan méridien AP mené par le point P, coupe le tore suivant le cercle générateur égal à $dd'ef$; or la tangente à ce cercle au point q rencontre l'horizontale bef au point r ; donc, si l'on porte la partie br de cette horizontale de A en r' , la droite $r'T$ perpendiculaire à Ar' , sera la trace du plan tangent au tore, au

point Q du développement de la courbe d'intersection. Mais cette droite RT rencontre la trace GH du plan coupant au point T; d'où il suit que la droite menée par le point T et par le point Q touche la courbe EQGR' au point Q. La droite TQ' touche cette courbe au point Q'; la *sous-tangente* TP est la même pour les deux points Q, Q' situés sur la droite QPQ'.

Le plan tangent au point du tore qui se projette en I sur le plan horizontal, est horizontal; d'où il suit que la tangente au point K ou K' de la courbe d'intersection du cône et du plan GIH, est une droite horizontale, intersection du-plan tangent et du plan coupant vertical.

Du plan tangent de la seconde espèce: (Voyez art. 46.)

121. Le même plan que nous venons de considérer comme plan coupant, et qui contient une courbe à deux branches du tore, est aussi tangent au tore, non parce qu'il contient les deux tangentes au point double E d'une ligne du tore, mais parce qu'il ne diffère pas du plan qui serait déterminé par les tangentes à deux lignes distinctes du tore, l'une le cercle horizontal du rayon AE, l'autre le cercle vertical du diamètre EF.

Le plan vertical G'FH', perpendiculaire à l'extrémité F du diamètre EF, est aussi tangent au point F du tore, puisqu'il passe par les tangentes aux deux cercles qui se croisent à angle droit au point de contact F; c'est un plan tangent de la première espèce; il n'a de commun avec la surface que le point de contact F, qui est la limite des sections parallèles à une seule branche, comprises entre les deux plans verticaux parallèles GH, G'H'. L'élément du tore au point E est aussi la limite de ces mêmes sections; mais ce point E appartient en même temps à la ligne qui est limite des sections parallèles, dont chacune a deux branches séparées.

Troisième exemple d'intersection d'une surface de révolution par un plan. —

Intersection de la surface réglée de l'hyperboloïde de révolution par un plan.

(Pl. 15.)

122. Une droite qui tourne autour d'une autre droite fixe, engendre une surface de révolution, dont la section méridienne est une hyperbole qui a pour demi-axe principal et réel la plus courte distance des deux droites données. La droite génératrice est dans toutes ses positions parallèle à un plan méridien, et sa distance à ce plan est égale à la plus courte distance des deux droites données.

Un plan quelconque perpendiculaire à l'axe de révolution, coupe la surface suivant un cercle, le plan donné suivant une droite, et les points de

rencontre du cercle et de la droite appartiennent à la courbe d'intersection demandée.

Explication de la pl. 15. On suppose le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe de révolution, et le plan vertical perpendiculaire au plan coupant.

Soit XY l'intersection des deux plans de projection; (A, *aba'*) la droite fixe ou l'axe de révolution; (BC, *bc*) la droite mobile dans la position où elle est parallèle au plan vertical de projection. La perpendiculaire à ces deux droites (art. 36) est une horizontale AB, qui se projette sur le plan vertical au point *b* de la droite *ab*. Le pied (B, *b*) de cette perpendiculaire sur la droite (CB, *cb*), décrit en tournant autour de la droite fixe le cercle (BB'EF, *ebf*), qui est le plus petit de la surface, et qu'on nomme par cette raison *cercle de gorge*. Les autres cercles ont pour rayons les perpendiculaires abaissées des points de la droite donnée (CB, *cb*) prolongée indéfiniment sur l'axe de révolution. Le cercle de gorge divise la surface en deux parties égales, dont chacune a la figure d'un entonnoir, et qui sont tangentes l'une à l'autre; ces deux parties ne forment qu'une seule nappe divergente au-dessus et au-dessous du plan du cercle de gorge (*).

Si l'on conçoit par ce petit cercle un cylindre droit vertical, la droite génératrice de l'hyperboloïde qui est donnée dans un plan tangent à ce cylindre, et qui tourne autour de la droite fixe, passe successivement dans tous les plans tangens au même cylindre; or, par un point quelconque de l'hyperboloïde, on peut mener (art. 55) deux de ces plans, dont chacun contient la

(*) M. Brocchi, conservateur des modèles à l'École polytechnique, m'a communiqué un procédé simple et très-exact, de son invention, pour exécuter sur le tour une portion du solide terminé par un hyperboloïde de révolution, et compris entre deux cercles égaux, qui sont à égale distance du cercle de gorge: ce procédé consiste, 1° à faire un cylindre droit, qui a pour hauteur la distance des deux cercles extrêmes de l'hyperboloïde, et pour base supérieure ou inférieure, l'un de ces cercles. 2° Le cylindre étant supposé horizontal, on dispose une scie rectiligne dans un plan vertical qui passe par le milieu de l'arête la plus élevée du cylindre, et qui fait avec l'axe horizontal de ce cylindre un angle égal à celui de ce même axe avec une parallèle à la génératrice de l'hyperboloïde. On donne un trait de scie, de manière que la droite mobile qui termine les dents soit constamment parallèle à la génératrice de l'hyperboloïde, et son mouvement de va et vient doit cesser, lorsque le trait de scie est à une distance de l'axe du cylindre, égale à un rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde. 3° On remet le cylindre ainsi disposé sur le tour, de manière que l'axe passe de ce cylindre par les deux pointes de cet outil, et avec le ciseau on enlève du cylindre des tranches circulaires concentriques à son axe, en prenant le trait de scie pour la limite de ces tranches. Après cette opération, le cylindre droit est transformé en une hyperboloïde de révolution de même base et de même hauteur.

droite génératrice; donc il n'y a aucun point de la surface qui ne soit l'intersection de deux droites appartenant à cette surface. Ainsi le plan vertical CD, parallèle au plan vertical de projection, contient deux droites de la surface qui se croisent au point (B, b) ; elles font avec le plan horizontal le même angle; l'une rencontre le plan horizontal au point C, et l'autre au point D; la distance CD de ces deux points, et les deux droites de la surface, forment un triangle isocèle égal au triangle cbd donné sur le plan vertical de projection. Chacune des droites (BC, bc) , (BD, bd) est une génératrice de la surface. En marquant par des fils leurs positions successives, on obtient deux systèmes de droites qui divisent la surface en petits quadrilatères; les droites d'un système ne se rencontrent pas entre elles, mais elles sont toutes rencontrées par une droite quelconque de l'autre système. Les droites de l'un et l'autre système sont également inclinées par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de révolution; l'angle qu'elles font avec ce plan est constant.

Ainsi la surface que nous considérons ne jouit pas seulement de la propriété générale de toutes les surfaces de révolution, d'être coupées par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution suivant des cercles, mais elle peut encore être engendrée par une droite de deux manières différentes; d'où il suit qu'un point quelconque de l'intersection de la surface et du plan, résulte de l'intersection d'un cercle ou d'une ligne droite par le plan donné.

123. Soit le cercle du rayon AU, situé dans un plan horizontal quelconque gu , qui rencontre la droite génératrice (BC, bc) au point (U, u) ; ce plan coupe le plan donné (NOP) suivant l'horizontale (GG', g) ; cette horizontale et le cercle du rayon AU se rencontrent aux points (G, g) , (g, g) , qui appartiennent à la courbe d'intersection de la surface et du plan donné (NOP).

Toutes les droites de la surface se projettent sur le plan horizontal suivant des tangentes au petit cercle du rayon AB. Soit $G\beta$ l'une de ces tangentes, qui touche le cercle au point β , et qui coupe en H le cercle du rayon AC ou AD que le point C de la droite génératrice décrit sur le plan horizontal de projection; la droite de la surface $(H\beta, H'\beta')$ est coupée par le plan donné (NOP) au point (G, g) déjà trouvé. Si l'on mène par le point G, la tangente $G\gamma$ au cercle du rayon AB, qui touche ce cercle au point γ , et coupe le cercle du rayon AC au point ψ , on aura une nouvelle droite de la surface $(\psi G\gamma, \psi' g\gamma')$ qui passe encore par le point (G, g) de la section plane de la surface. Les deux droites de la surface $(HG\beta, H'g\beta')$, $(\psi G\gamma, \psi' g\gamma')$ passent l'une par le point (β, β') , et l'autre par le point (γ, γ') du cercle de gorge $(BB'EF, ebf)$.

124. Un cercle ou une droite de la surface étant donnée, on vient de construire le point de la courbe d'intersection de la surface par un plan, qui se

trouve sur l'une ou l'autre de ces lignes, et les deux projections de ce point déterminent le plan méridien qui le contient. Mais on pourrait proposer de résoudre le problème inverse : *Étant donné un plan méridien, trouver le point de la courbe situé dans ce plan ?* Soit AGQ la trace horizontale donnée d'un plan méridien ; on demande le point (G, g) de la section située dans ce plan.

Solution. Le plan méridien AGQ est coupé par le plan donné (NOp) , suivant une droite qui rencontre l'axe de révolution au point (A, a) . On regarde cette droite comme la génératrice d'un cône droit qui a pour sommet le point (A, a) , et pour base sur le plan horizontal de projection, le cercle d'un rayon AQ , dont l'extrémité Q est déterminée par la rencontre des deux traces AQ, ON . La droite génératrice de l'hyperboloïde de révolution (CB, cb) rencontre le cône droit en deux points, dont on construit les projections horizontales U et Z . Décrivant du point A comme centre avec les rayons AU, AZ , des cercles qui coupent la trace donnée AG du plan méridien, aux points G et Z' , ces points appartiennent à la projection horizontale de la courbe d'intersection de l'hyperboloïde par le plan (NOp) .

125. Pour trouver les points d'intersection d'un cône droit et d'une droite, on mène par le sommet du cône une parallèle à la droite donnée ; par cette droite et sa parallèle, on conduit un plan qui coupe le cercle base du cône en deux points ; les arêtes du cône menées par ces points, coupent la droite donnée aux points demandés.

Par le sommet (A, a) du cône droit, on a mené la parallèle (A, a') à la droite génératrice (CB, cb) ; le plan conduit par cette droite et sa parallèle coupe le plan horizontal suivant la droite RS , qui rencontre le cercle du rayon AQ , base du cône droit, aux points R et S . Les arêtes du cône qui passent par ces points, coupent la droite (CB, cb) aux points dont U et Z sont les projections horizontales. Faisant tourner cette droite autour de l'axe (A, aa') , les deux points qui se projettent sur le plan horizontal en U et Z , décrivent des cercles de la surface qui rencontrent nécessairement la droite du plan coupant, située dans le plan méridien donné AGQ , aux points dont G et Z' sont les projections horizontales.

Les cercles décrits autour de l'axe (A, ab) , par les points $(U, u), (Z, z)$ de la droite génératrice (CB, cb) , se projettent sur le plan vertical, respectivement suivant les horizontales menées par les points u et z . Les mêmes horizontales contiennent les projections verticales g, z' des points de la surface, dont G et Z' sont les projections horizontales.

126. La circonférence du rayon AQ rencontre la trace NO du plan coupant aux points Q et Q' , situés dans les deux plans méridiens AQ, AQ' . En portant sur AQ' les droites opposées $A\phi, AZ'$, respectivement égales aux

droites AG , AZ' , les points ϕ et Z' appartiennent, comme les points G et Z , à la projection horizontale de l'intersection de l'hyperboloïde par le plan donné (NOp).

On trouvera de la même manière les points I et J de cette projection, situés sur le méridien AN perpendiculaire à la trace horizontale ON du plan coupant. Les opérations semblables aux précédentes sont tracées sur l'épure.

Des tangentes à la courbe d'intersection de la surface réglée d'une hyperboloïde de révolution par un plan. — Nouvel exemple d'un plan tangent de la seconde espèce. (Pl. 15.)

127. Un point quelconque de l'hyperboloïde de révolution réglé ou à une seule nappe (*), est l'intersection de deux lignes droites et d'un cercle qui se croisent en ce point. Le plan tangent au même point contient les deux droites et la tangente au cercle; de ces trois droites, deux seulement sont nécessaires pour déterminer le plan tangent.

Soit (G, g) un point de l'hyperboloïde de révolution; les droites de la surface qui se croisent en ce point, rencontrent le plan horizontal aux points H et $\downarrow$; par conséquent la droite $H\downarrow$ est la trace horizontale du plan tangent. Le plan méridien du point (G, g) étant vertical, le plan tangent en ce point lui est perpendiculaire (art. 63); d'où il suit que ces deux plans sont coupés par le plan horizontal de projection, suivant deux droites AG , $H\downarrow$ perpendiculaires entre elles. En effet, dans le triangle $GH\downarrow$, formé par les tangentes au cercle du rayon AB , menées par le point G , les côtés GH , $G\downarrow$ sont égaux, et forment avec la trace AG du plan méridien des angles égaux; le côté $H\downarrow$ est donc perpendiculaire à AG . Cette construction fait voir que le plan tangent en (G, g) est en même temps sécant en tout autre point des deux droites de la surface par lesquelles il passe, puisque sa trace sur le plan horizontal est une corde $H\downarrow$ d'un cercle appartenant à la surface.

128. La trace horizontale $\downarrow H$ du plan tangent étant prolongée, elle rencontre la trace NO du plan coupant (NOp), au point T qui appartient à la tangente de la courbe d'intersection de l'hyperboloïde de révolution et du plan donné: d'où il suit que la droite TG est la projection horizontale de cette tangente; ϕ sera une autre tangente au point ϕ de la courbe GL_1Z_1Z' ,

(*) La surface de l'hyperboloïde de révolution non réglée est engendrée par une hyperbole qui tourne autour de son axe principal non transverse; cette surface est formée de deux nappes séparées.

si l'on prend sur la trace horizontale NO du plan coupant, la droite NT= N ϕ , et sur la perpendiculaire G ϕ à la droite AN, G ϕ '= ϕ ' ϕ .

129. Ayant construit la projection horizontale IGZ'JZ ϕ I de l'intersection de l'hyperboloïde par le plan donné (NOP), on l'obtiendra dans son plan (fig. 1.a), en faisant tourner ce plan autour de sa trace verticale Op (fig. 1). Après ce mouvement, un point tel que (G, g) de la section s'abat sur le plan vertical de projection en g' (fig. 1.a), la distance gg' à la charnière Op étant égale à GG' (fig. 1). On construit la tangente au point g' (fig. 1.a), en portant la droite OT (fig. 1) en OT' (fig. 1.a) sur la perpendiculaire ON' à Op; la droite menée par les points T', g' est la tangente. Les points (I, i), (J, j) de la section deviennent sur son développement (fig. 1.a) i' et j', situés sur la droite i'j' menée parallèlement à Op, à la distance ON' = ON.

Des asymptotes aux sections planes d'une hyperboloïde de révolution.

130. On démontre par l'algèbre que les sections de l'hyperboloïde de révolution sont, comme les sections du cône droit (art. 80), ou des ellipses, ou des hyperboles, ou des paraboles. Dans l'exemple précédent, la section est une ellipse, dont la projection horizontale est une autre ellipse. Il est évident qu'elle ne peut s'étendre à l'infini, que lorsqu'une ou plusieurs droites de l'hyperboloïde sont parallèles au plan coupant. Il y a un moyen très-simple de reconnaître s'il y a sur un hyperboloïde de révolution, une droite parallèle à un plan donné. Il consiste à mener par un point pris à volonté sur l'axe de révolution, une droite parallèle à la droite génératrice de l'hyperboloïde, considérée dans une position quelconque. Cette parallèle, en tournant autour de l'axe, engendrera un cône droit, tel que chacune de ses arêtes sera parallèle à une droite de l'hyperboloïde, et réciproquement toute droite de l'hyperboloïde aura sa parallèle sur le cône droit. Mais en menant par le sommet de ce cône un plan parallèle à un plan donné, il peut arriver que ce plan parallèle soit tangent au cône, ou sécant suivant deux arêtes, ou enfin qu'il n'ait de commun avec le cône que le sommet. Suivant que l'un de ces trois cas aura lieu, la section de l'hyperboloïde de révolution sera une parabole, ou une hyperbole, ou une ellipse. Cela est évident pour l'ellipse; le plan coupant n'étant pour ce cas parallèle à aucune des droites de l'hyperboloïde, la courbe d'intersection est nécessairement fermée. S'il y a sur le cône droit des arêtes parallèles au plan coupant, les droites de l'hyperboloïde parallèles à ces arêtes, ne seront rencontrées par le plan coupant qu'à l'infini; les tangentes aux points de la section situés sur ces droites, sont les asymptotes.

131. Le plan tangent en un point de l'hyperboloïde de révolution, est déterminé (art. 63 et 127) par les deux conditions de passer par une droite de la surface, et d'être perpendiculaire au plan méridien du point de contact. Mais lorsque le point de contact est à l'infini sur une droite donnée de la surface, le plan méridien de ce point est nécessairement parallèle à cette droite (art. 123); donc un plan mené par la droite donnée, perpendiculairement au plan méridien qui lui est parallèle, est le plan tangent au point situé à l'infini sur cette droite : l'intersection de ce plan tangent et du plan de la section, est l'*asymptote*.

Dans le cas où la section est une hyperbole, il y a sur l'hyperboloïde de révolution, deux droites parallèles au plan coupant, qui déterminent deux plans tangens pour les points de ces droites situés à l'infini; les droites intersections de ces plans et du plan de la section, sont les asymptotes. Dans le cas de la *parabole*, le plan tangent au point situé à l'infini sur la droite parallèle au plan coupant, est parallèle à ce dernier plan, et la section n'a pas d'*asymptote*. Pour démontrer le parallélisme de ces deux plans, nous ferons remarquer que les méridiens des points de contact situés à l'infini, passent par les arêtes du cône droit, parallèles aux droites de l'hyperboloïde, auxquelles ces points appartiennent; mais par hypothèse, dans le cas de la parabole, le plan mené par le sommet du cône droit parallèlement au plan coupant, est tangent à ce cône; donc le plan méridien mené par l'arête de contact est perpendiculaire au plan coupant : or le plan tangent au point situé à l'infini passe par une parallèle à l'arête de contact du cône, et il est de plus perpendiculaire au plan méridien de cette arête; donc le plan tangent et le plan coupant passent par des droites parallèles, et sont perpendiculaires au même plan méridien; d'où il suit qu'ils sont parallèles. Ce parallélisme n'a pas lieu pour le cas de l'hyperbole, parce que les plans méridiens des points de contact situés à l'infini, étant normaux au cône droit, ils sont nécessairement inclinés par rapport au plan coupant, dont le parallèle mené par le sommet du cône coupe ce cône suivant deux arêtes.

Des foyers des sections planes de l'hyperboloïde de révolution à une nappe,

132. Les sections planes de l'hyperboloïde de révolution étant comme pour le cône droit, des ellipses, ou des hyperboles, ou des paraboles, ces courbes ont des foyers, et on démontre que ces foyers sont, comme pour le cône droit (art. 87), les points de contact des sphères circonscrites à l'hyperboloïde et tangentes aux plans des courbes.

Soit ABCD (fig. 5, pl. suppl. A) la section méridienne de l'hyperboloïde,

composée des deux branches égales d'hyperbole ALC, BND, et supposons que le plan de cette section soit perpendiculaire au plan qui coupe l'hyperboloïde, en sorte que l'intersection des deux plans soit la droite PQ. Désignons par u' une droite quelconque de l'hyperboloïde, qui se projette (fig. 5) suivant la droite II', tangente aux deux branches de l'hyperbole; la droite de l'espace u' est coupé par le plan PQ, en un point m de l'espace, qui appartient à la section faite par ce plan, et dont la projection (fig. 5) est le point M. Les sphères des rayons RF, R'F' circonscrites à l'hyperboloïde suivant les cercles des diamètres AB, CD et tangentes au plan PQ, touchent ce plan aux points F, F' qui sont les foyers de la section. En effet, la droite um' de l'hyperboloïde (les trois lettres i, m, i' désignent des points de l'espace et ne sont point sur la fig. 5) comprend deux parties $mi, m'i'$ respectivement tangentes aux sphères circonscrites des rayons RF, R'F'; or les tangentes à l'une ou à l'autre de ces sphères, qui partent d'un même point pris en dehors, sont égales, donc on a : $mi = m'F; m'i' = m'F'$; d'où il suit que la somme des rayons vecteurs ($mF + m'F'$) est égale à $(mi + m'i')$ ou à la partie de la génératrice de l'hyperboloïde, comprise entre les deux cercles de l'hyperboloïde des diamètres AB, CD; mais quelle que soit la position de la génératrice par rapport à l'axe de révolution, cette partie ne varie pas; donc la somme des rayons vecteurs d'un point quelconque de la section plane d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, est une quantité constante. La même démonstration s'applique à l'ellipse, à l'hyperbole et à la parabole.

Étant donnés l'axe et la droite génératrice d'un hyperboloïde de révolution, la détermination des foyers des section planes de cette surface sera l'objet d'un article du livre II, chapitre I^{er}, des lieux géométriques. Nous ferons usage dans cet article de la propriété (*) des courbes du second degré par rapport à une droite qu'on nomme la directrice de ces courbes.

(*) M. Blanchet, professeur agrégé des collèges royaux de Paris, m'a communiqué (en avril 1826) la démonstration suivante de cette propriété :

Soit CSD (fig. 1, pl. suppl. A) la section par l'axe d'un cône droit, dont le plan est perpendiculaire à un autre plan sécant quelconque PQ. On a vu (art. 87) qu'une sphère inscrite au cône suivant le cercle du diamètre AB et tangente au plan sécant PQ, était touchée par le plan au point F, l'un des foyers de la section conique PQ. M. Blanchet a observé que la droite intersection du plan PQ et du cercle AB était la directrice de la section conique PQ; qu'ainsi le point T intersection des droites AB, PQ appartenant à cette directrice, sa position était déterminée, puisqu'elle est dans le plan TPQ, et perpendiculaire au plan de la section méridienne CSD du cône droit. Le plan sécant ayant tourné autour de sa trace PQ pour s'appliquer sur le plan de la section CSD, la directrice de la section du cône par le plan PQ est la droite TT perpendiculaire à la trace TPQ.

§ IV. DES INTERSECTIONS DES SURFACES RÉGLÉES PAR UN PLAN, ET DES TANGENTES
AUX COURBES D'INTERSECTION.

133. Une surface réglée est définie (art. 52), lorsque pour chacun de ses points, on peut assigner la position de la droite mobile qui s'appuie sur les trois courbes directrices. Un plan étant donné, une droite quelconque de la surface est coupée par ce plan en un point qui appartient à la courbe d'intersection de la surface et du plan : or on sait comment (art. 17) on construit le point de rencontre d'une droite et d'un plan donnés de position ; par conséquent on trouvera tant de points qu'on voudra de la courbe d'intersection d'une surface réglée et d'un plan ; mais la tangente à cette courbe en un point déterminé résulte de l'intersection du plan tangent à la surface au même point et du plan coupant ; ainsi la détermination de la tangente dépend de la solution de ce problème : *Mener un plan tangent à une surface réglée par un point donné sur la surface.*

Il est nécessaire, pour résoudre ce problème, de considérer la surface réglée particulière, qui a pour directrices de la droite mobile trois droites fixes données de position, et d'en faire connaître les propriétés par rapport au plan tangent.

De la surface réglée élémentaire, ou de l'hyperboloïde à une nappe. (Pl. 16.)

134. Nous avons démontré, dans nos *Éléments de géométrie à trois dimensions* (*), qu'il n'y avait que cinq espèces de surfaces du second degré, dont trois ont un centre, et deux autres en sont dépourvues. Les trois premières se nomment *ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux*

La propriété de la section conique PQ par rapport à la directrice TT consiste dans la relation qui existe entre les distances d'un point quelconque de la section au foyer F et à la droite TT ; ces deux distances sont dans un rapport constant pour l'ellipse et l'hyperbole, et elles sont égales pour le parabole. Adoptant les dénominations de l'article 87 cité page 51, et ayant abaissé du point M la perpendiculaire MNN' sur l'axe SRR' du cône droit, on a $mF = mi = AN = BN'$. Or les deux triangles QTB, QMN' donnent la proportion :

$$BN \text{ ou } mF : MT :: QB : QT :: \sin QTB : \sin QBT ; \text{ donc } \frac{mF}{MT} = \frac{\sin QTB}{\sin QBT}$$

mF et MT sont les distances d'un point quelconque m de la section conique PQ au foyer F et à la directrice TT ; ces distances sont entre elles dans le rapport des sinus de deux angles qui ne dépendent que de la direction du plan PQ par rapport à l'axe du cône droit ; d'où il suit que ce rapport est constant. Lorsque la section est une parabole (fig. 4, pl. suppl. A), les deux angles QTC, QBT sont supplémentaires, l'un de l'autre, et on a : $mF = MT$.

(*) : vol. in 8°, *partie analytique*, F. Didot, 1817.

nappes; les deux autres, *paraboloides elliptique et paraboloides hyperbolique*. Cette dernière, et l'hyperboloïde à une nappe, jouissent de la propriété d'être engendrées par une droite de deux manières différentes; on peut aussi les appeler *surfaces réglées du second degré*, et c'est ainsi que nous les désignons *pl. 16 et 17*.

135. Étant données trois droites fixes, on prend un point quelconque sur la première; par ce point et par la seconde droite, on mène un plan qui coupe la troisième droite; la quatrième droite, menée par le point d'intersection et par le point de la première droite, s'appuie sur les trois directrices fixes. Cette quatrième droite, qu'on mène successivement par tous les points de la première, est la génératrice de l'hyperboloïde à une nappe. Cette surface a un centre, et trois axes principaux rectangulaires qui passent par ce centre. Ces trois axes sont (*pl. 16, fig. 1*) les droites BB' , EAF ou caf , et caq .

Deux de ces axes BB' , EF sont aussi ceux de l'ellipse qui forme la gorge de la surface. Lorsque ces axes sont égaux (*fig. 2, pl. 16*), l'ellipse de gorge devient un cercle, et l'hyperboloïde à une nappe ne diffère pas de l'hyperboloïde de révolution, qui a été l'objet des articles (122-133). Les sections parallèles des surfaces du second degré étant semblables, les plans parallèles à l'ellipse de gorge de l'hyperboloïde à une nappe, coupent cette surface suivant des ellipses semblables, dont les axes augmentent continuellement, à mesure que leurs plans s'éloignent de l'ellipse de gorge, en sorte que la surface est composée de deux parties égales, qui s'étendent indéfiniment au-dessus et au-dessous de cette ellipse.

$BB'EF$ (*fig. 1, pl. 16*) est l'ellipse de gorge construite sur les axes BB' , EF . Le plan mené par l'axe EF , perpendiculairement à celui de l'ellipse, coupe l'hyperboloïde suivant l'hyperbole xx' , yy' , qui a pour axes principaux la droite $ef = EF$, et la droite donnée ca . Un troisième plan perpendiculaire à celui de la gorge, qu'on mènerait par l'axe BB' , couperait l'hyperboloïde suivant une hyperbole qui aurait pour axes principaux les droites BB' et ca . Ainsi les trois sections principales, construites sur les trois axes donnés BB' , EF , ca , qui se croisent au centre A de la surface du second degré, sont pour l'hyperboloïde à une nappe, une ellipse et deux hyperboles; elles seraient toutes trois ellipses pour l'ellipsoïde, et se réduiraient à deux hyperboles pour l'hyperboloïde à deux nappes. Les droites de l'hyperboloïde à une nappe, projetées sur les plans des trois sections principales de cette surface, sont tangentes à ces sections, car on démontrera (art. 144) que les plans projetant les droites de la surface, sont comme tous les plans passant par ces droites tangents à la surface.

Des sections elliptiques et circulaires, prises pour les directrices de la droite mobile génératrice de l'hyperboloïde à une nappe; de la double génération de cette surface par une ligne droite. (Fig. 1, pl. 16.)

136. Toutes les sections planes de l'hyperboloïde sont, comme pour le cône à base circulaire, des ellipses, des hyperboles ou des paraboles; deux systèmes de plans parallèles le coupent suivant des cercles : tous les cercles d'un même système ont leurs centres sur une droite qui passe par le centre de la surface, et qui est inclinée par rapport à leurs plans. Deux plans $(xy, x'y')$ (fig. 1), parallèles au plan de l'ellipse de gorge $(BB'EF)$, coupent l'hyperboloïde suivant des ellipses qui se projettent sur le plan horizontal, suivant une seule ellipse $XYZZ'$, semblable à l'ellipse $BB'EF$ et semblablement située. Deux autres plans menés par les grands axes de ces ellipses (XY, xy) , $(XY, x'y')$ sous une inclinaison déterminée, coupent la surface suivant deux cercles égaux et parallèles, d'un diamètre égal à la droite XY . Concevons que les circonférences de ces deux cercles aient été divisées en un nombre pair d'arcs égaux, à partir des points (X, x) , (X, x') extrémités de leurs diamètres parallèles; la droite menée du point (X, x) du cercle inférieur à un point déterminé du cercle supérieur, déterminera la position de toutes les autres droites de la surface. Avancé d'un arc sur le cercle inférieur, on avancera pareillement d'un arc égal sur le cercle supérieur, et la droite qui joindra les extrémités de ces deux arcs appartiendra encore à la surface; mais du point (X, x) du cercle inférieur on peut mener deux droites de même longueur à deux points déterminés du cercle supérieur, et il est évident que ces deux points à égale distance du point (X, x) sont situés dans un plan tel que $\pi/4$, perpendiculaire à la droite XY .

Les deux droites, en se mouvant suivant la même loi, engendrent la même surface; les deux systèmes de droites divisent cette surface en petits quadrilatères; une droite quelconque de l'un des systèmes coupe toutes les droites de l'autre système. On remarquera que les projections de ces droites sur le plan horizontal divisent l'ellipse $XYZZ'$ en arcs inégaux, tels que les projections des deux systèmes de droites passent par les mêmes points de cette ellipse. Il n'est pas nécessaire, pour obtenir cette division, de connaître l'inclinaison du plan du cercle par rapport au plan de l'ellipse qui a pour grand axe le diamètre du cercle. On décrit sur XY , comme diamètre, une demi-circonférence qu'on divise en parties égales à partir de l'extrémité X de ce diamètre, et on abaisse des points de division des perpendiculaires sur XY ,

qui divisent l'ellipse de la manière la plus symétrique et la plus commode pour exécuter la surface avec des fils.

Néanmoins les perpendiculaires à XY , voisines des droites Xr ou Yr , couperaient l'ellipse $XYZZ'$ sous des angles très-aigus, et il conviendra par cette raison de déterminer l'inclinaison du plan qui coupe l'ellipsoïde suivant un cercle. La perpendiculaire Zv à l'axe BB' rencontre le cercle du diamètre XY au point v , par lequel on mène le rayon Av . Le plan mené par l'axe XY , et qui fait avec le plan de l'ellipse de gorge l'angle $Z'Av$, coupe l'hyperboloïde à une nappe suivant un cercle dont la projection sur le plan de la gorge est évidemment l'ellipse $XYZZ'$. Ayant divisé le quart de cercle Xu en parties égales, on abaisse de chaque point de division, tel que t , la perpendiculaire ts sur AZu ; on porte As en $A's'$ sur le rayon Av , et les droites rectangulaires $s't'$, tt' , parallèles respectivement aux axes EF , BB' , se coupent à l'un des points de division t' de l'ellipse $XYZZ'$. Cette division de l'ellipse étant connue, on prend deux disques elliptiques égaux et semblablement placés, dont les centres sont sur une droite perpendiculaire à leurs plans; on attache sur les bords de chaque disque de petites pointes ou crochets, aux points de division déterminés comme on vient de l'indiquer. Le fil qui joint successivement les points correspondans des deux ellipses, engendre l'hyperboloïde dont la gorge est dans un plan parallèle aux disques, et à égale distance de ces disques. Lorsqu'à la place des disques elliptiques on prend deux disques circulaires, l'hyperboloïde à une nappe devient une surface de révolution dont la gorge (*fig. 2*) est le cercle $BB'EF$, concentrique au cercle $XYZZ'$, projection des deux sections circulaires à égales distances du plan de la gorge.

137. Au lieu de prendre (*fig. 1*) pour directrices de la droite mobile génératrice de l'hyperboloïde à une nappe, deux ellipses égales et parallèles, on pourrait supposer que cette droite s'appuie constamment sur deux cercles égaux et parallèles, dont les centres sont joints par une droite qui est inclinée par rapport aux plans de ces cercles.

Soient (*fig. 3, pl. 16*) 1, 2, 3, 4..., et $abcd$ ces deux cercles; ayant divisé leurs circonférences dans le même nombre de parties égales, on mènera d'un point quelconque de division 1 du premier cercle, deux droites égales et d'une longueur donnée 1, a , 1, a' vers les deux points de division a , a' du second cercle. On aura pour les droites d'un système, celles qui joignent les points consécutifs 1, 2, 3, 4... du premier cercle, et les points consécutifs a , b , c , d ... du second; les droites de l'autre système joindront les points consécutifs et correspondans (1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4'), etc. Ces deux systèmes de droites divisent en parties égales le cercle de gorge $ab'ef$.

138. Si l'on donnait l'ellipse de gorge et une seule droite de la surface hy-

perboloïde, cette surface serait déterminée. En effet, on considérerait l'ellipse donnée comme la base d'un cylindre droit. Un plan quelconque, tangent à ce cylindre, couperait la droite donnée en un point; l'arête de contact du cylindre et du plan rencontrerait l'ellipse en un autre point : la droite qui joindrait ces deux points appartiendrait à la surface.

139. Soit qu'on prenne pour directrices de la droite génératrice de l'hyperboloïde à une nappe, deux ellipses égales et parallèles, ou deux cercles égaux et parallèles, cette surface comprend deux séries de droites, et le plan tangent en un point quelconque est déterminé par les deux droites qui se croisent en ce point; considérant trois droites quelconque de l'une ou l'autre série comme les directrices d'une droite mobile, il est évident (art. 52) que la surface engendrée par cette droite sera déterminée, et qu'elle ne différera pas de l'hyperboloïde à une nappe, qui a pour génératrice la droite, dont les directrices ont été désignées dans l'article précédent. On peut donc définir la surface de l'hyperboloïde à une nappe par cette propriété caractéristique, qu'elle est engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois droites fixes.

En admettant cette définition, on peut démontrer synthétiquement que la surface a un centre, et qu'elle peut être engendrée par une droite mobile de deux manières différentes. Nommons A, B, C trois droites de l'espace qui ne se rencontrent pas et qui ne sont pas parallèles à un même plan, et soit construit (art. 40) le parallélépipède capable de ces trois droites, et de leurs symétriques A', B', C' (art. 41). Chacune de ces droites symétriques, A' par exemple, est déterminée par la condition d'être parallèle à A , et d'être sécante des deux autres B et C . On a démontré (art. 42) qu'une droite T qui s'appuie sur les trois droites A, B, C , avait pour symétrique une droite parallèle S qui s'appuie sur les trois droites symétriques A', B', C' , et que les deux transversales T, S étaient à la même distance du centre du parallélépipède. Ayant construit une série de transversales T, T', T'' ... des trois droites A, B, C , on en déduit les transversales symétriques correspondantes S, S', S'' ; si les droites T, T', T'' ... appartiennent à la surface réglée, les droites S, S', S'' ... seront sur la même surface.

En effet, concevons par le centre I (fig. 7, pl. suppl. A) du parallélépipède, trois parallèles $ab, ca', b'c'$, aux trois droites données A, B, C , ou à leurs symétriques A', B', C' , et les trois plans P, P', P'' menés par ces parallèles prises deux à deux. Soit t un point quelconque de la transversale T , et t' (*)

(*) Ces points t, t' sont marqués des mêmes lettres sur la fig. 3, pl. 5; les droites tm, tm' (même figure) sont les transversales qui sont ici désignées par les lettres T, T' , et qui coupent l'une des trois droites AB, CA', BC' , l'autre leurs symétriques $A'B', CA, BC$ (fig. 3, pl. 5).

son point symétrique, qui est situé, sur la droite It prolongée, et qu'on détermine en prenant $It' = It$. On conçoit un second parallépipède $tt'mm'$ (fig. 7, pl. suppl. A) de même centre I que le premier, dont les arêtes sont parallèles aux trois droites A, B, C , et qui a pour diagonale la droite tt' . Le solide $tt'mm'$ est divisé par les trois plans P, P', P'' en quatre parallépipèdes égaux, dont deux $Itbc, It'aa'$ ont pour diagonales les droites égales It, It' ; or les points t, t' rapportés aux trois plans P, P', P'' sont déterminés l'un par les trois droites tx, xb, bI , l'autre par les trois droites $t'x', x'a, aI$ respectivement égales, parallèles et comprenant les mêmes angles; donc, quelle que soit la relation qui existe entre les trois premières droites, elle subsiste entre les trois secondes; donc les positions des points t et t' sont déterminées par les mêmes conditions; d'où il suit que ces points appartiennent à la même surface, et que cette surface a pour centre le point I , centre du parallépipède capable des trois directrices données A, B, C .

140. Le centre I de la surface n'est pas seulement le centre du parallépipède construit sur les trois droites A, B, C ou A', B', C' . Trois droites quelconques prises dans l'une ou l'autre série des transversales $T, T', T'', \dots, S, S', S''$ déterminent un parallépipède; tous les parallépipèdes construits sur trois transversales quelconques prises dans la même série, ont même centre, et ce centre commun est aussi celui de la surface. Les trois transversales de chaque série peuvent être prises pour la génératrice de l'hyperboloïde; d'où il suit que cette surface peut être engendrée par une droite mobile de deux manières différentes, et qu'il n'y a aucun point de cette surface par lequel on ne puisse mener deux droites D, D' , l'une D de la série des transversales $T, T', T'', \dots$ l'autre D' de la série $S, S', S'', \dots$.

Cette propriété de la double génération de l'hyperboloïde à une nappe, subsiste encore dans le cas particulier où les trois droites A, B, C directrices de la droite mobile, sont parallèles à un même plan; alors l'hyperboloïde à une nappe prend le nom de *paraboloïde hyperbolique*. Avant la division (art. 134) des surfaces du second degré en cinq espèces, le paraboloïde hyperbolique était connu en charpenterie sous le nom de *pan* ou *plan gauche*; on n'avait considéré pour la construction de certains combles, que la portion du paraboloïde comprise dans le quadrilatère qui est formé par quatre droites de cette surface non situées dans le même plan, et que plusieurs géomètres avaient nommé *quadrilatère gauche*.

Du paraboloïde hyperbolique, de sa double génération par une ligne droite.
(Fig. 1, pl. 17.)

141. La section principale qui est une ellipse BB'EF (fig. 1, pl. 16) pour l'hyperboloïde à une nappe, devient pour le paraboloïde hyperbolique, une parabole; soit ZFZ' (pl. 17, fig. 1) cette parabole; toutes les droites de la surface se projettent sur le plan de cette parabole, suivant les tangentes à cette courbe. Soit FF'G' la tangente au sommet F de la parabole et la projection horizontale de l'une de ces droites; ff'g' ou ff''g''; la projection de cette droite de la surface sur un plan vertical XY parallèle à la projection horizontale FF'. En prenant pour directrices de la droite génératrice du paraboloïde, la parabole FMNZ (fig. 1), et la droite (FF'G', ff'g' ou ff''g'', fig. 1, 1.a), toutes les positions de la droite génératrice seront déterminées. En effet, considérons la parabole ZFZ' comme la base d'un cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de cette parabole; puisque, par hypothèse, les droites du paraboloïde se projettent (fig. 1) suivant les tangentes à la parabole ZFZ', un plan quelconque tangent à ce cylindre coupera les droites (F'G', ff'g'), (F'G', ff''g'') en deux points; l'arête de contact sur le cylindre rencontre la parabole en un autre point; les droites menées de ce point aux deux premiers, appartiennent à la surface. Les projections de ces droites sur le plan vertical XY sont toutes parallèles entre elles, et parallèles aux droites données ff', ff''. Soient M, N, Z, ou M', N', Z', les points de la parabole qui se projettent sur le plan vertical XY en m, n, z, m', n', z'. Les parallèles menées par ces derniers points aux droites ff'g', ff''g'' sont les projections verticales des droites de la surface, qui ont pour projections horizontales les tangentes à la parabole FF', MI, M'I, NK, N'K, ZL, Z'L. Tous les plans perpendiculaires au plan de la parabole ZFZ', et parallèles au grand axe AF' de cette parabole, coupent le paraboloïde suivant une parabole constante F'I'I'K'K'L'L'. En faisant mouvoir cette parabole dans les plans FA, MS, M'S, NU, N'U, ... de manière que son sommet parcoure la parabole de la section principale ZFZ', elle engendre le paraboloïde hyperbolique. Les paraboles fixe et mobile divergent dans l'espace en sens contraire (*); ces diverses propriétés du paraboloïde réglé se démontrent par l'algèbre.

(*) Si ces deux paraboles divergeaient dans le même sens, la parabole mobile, telle que F'I'I'Y', égale à la parabole L'F'L' retournée, engendrerait le paraboloïde elliptique. (Voy. la définition des autres surfaces du second degré, art. 134.)

142. En partant de la définition du paraboloïde hyperbolique que cette surface a pour génératrice une droite mobile qui s'appuie sur trois droites fixes parallèles à un même plan, on démontre synthétiquement qu'elle jouit comme l'hyperboloïde à une nappe, dont elle est un cas particulier, de la double génération par une ligne droite.

Soient AB, MN, CD (*fig. 7, pl. suppl. A*), les trois droites parallèles à un même plan, par exemple au plan horizontal qui contient la droite AB ; il s'agit de démontrer que toutes les transversales de ces trois droites, telles que $AD, IK, BC, \dots$ sont parallèles à un même plan, et par conséquent parallèles au plan mené parallèlement à deux quelconques d'entre elles. Menons par le point B les droites Bd, Bk respectivement parallèles aux droites AD, IK , et par les points G, K les parallèles Gg, Kk qui coupent les horizontales Cd, Nn aux points g et g . Les quatre droites IGK, IB, Gg, Kk sont dans un plan qui coupe celui du triangle CDd suivant la droite Bgk ; or les distances des points g, k au plan horizontal passant par la droite AB , sont respectivement égales aux distances des points G, K et du même plan; donc on a : $Bg = IG$; $Bk = IK$; mais des droites égales comprises entre deux parallèles, sont aussi parallèles entre elles; d'où il suit que la droite Bgk est parallèle à la droite IGK ; ainsi toutes les droites d'un paraboloïde, qui s'appuient sur trois droites parallèles à un même plan, sont elles-mêmes parallèles à un plan unique, lequel est parallèle à deux quelconques d'entre elles. On peut donc définir le paraboloïde hyperbolique, une surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur deux droites fixes, et qui est constamment parallèle à un même plan. Ce mode de génération étant admis, on démontre facilement la double génération par une ligne droite.

Démonstration de la double génération du paraboloïde réglé.

143. Soit (*pl. suppl. A, fig. 7*) un quadrilatère gauche $ABCD$ situé d'une manière quelconque dans l'espace; une droite peut se mouvoir de deux manières, 1° en s'appuyant sur les côtés opposés AB, CD , comme directrices, et restant parallèle au plan des deux autres côtés AD, BC ; 2° en s'appuyant sur ces derniers côtés comme directrices, et restant parallèle au plan des deux premiers AB, CD : une seule et même surface comprend toutes les droites dont la position est déterminée par ces deux lois de mouvement. Pour le démontrer, nous allons faire voir que toutes les droites telles que IK qui s'appuient sur les côtés AB, CD comme directrices, sont rencontrées par une droite quelconque MN qui s'appuie sur les deux directrices AD, BC .

Ayant construit le parallélogramme $ABDd$ sur les côtés AB , AD du quadrilatère, tirons la droite Cd , qui forme avec les lignes Dd , CD le triangle CDd , et avec les lignes Bd , BC le triangle CBd ; il est évident que les plans de ces triangles sont respectivement parallèles aux côtés opposés du quadrilatère gauche. Menons deux plans quelconques parallèles aux plans des triangles CBd , CDd , et soient Il , Mn les traces de ces plans sur le plan du parallélogramme $ABDd$. Leurs traces sur les plans des triangles CDd , CBd seront les droites Kl , Nn parallèles à la droite Cd , et on aura deux triangles IKl , MNn , dont les plans respectivement parallèles à ceux des triangles CBd , CDd , se coupent suivant la droite Gh qui passe par le point h , intersection des deux droites Il , Mn , et qui est parallèle aux droites Cd , Kl et Nn . Nous allons démontrer que la droite Gh qui rencontre nécessairement les droites IK , MN , les coupe au même point G .

Considérons d'abord cette droite Gh dans le plan du triangle KIl , et comme une parallèle de Kl , qui coupe la droite IK au point G : à cause des triangles semblables IhG , IKl , on a la proportion :

$$Il : Ih :: Kl : Gh;$$

d'où il suit que la droite Gh qui se termine au point G de la droite IK , a pour valeur $\frac{Ih}{Il} Kl$, ou $\frac{Bn}{Bd} Kl$, ou enfin à cause des triangles semblables BCd , BNn , $Gh = \frac{Nn}{Cd} Kl$.

Considérons maintenant la droite Gh dans le plan du triangle MNn , et comme une parallèle de Nn qui coupe la droite MN ; je dis que le point d'intersection ne différera pas du point G de la droite IK ; car on a, à cause des triangles semblables MNn , MGh , la proportion :

$$Mn : Mh :: Nn : Gh;$$

ce qui donne pour la longueur Gh , en supposant que l'extrémité G de cette droite soit sur MN :

$$Gh = \frac{Mh}{Mn} Nn = \frac{Il}{Dd} Nn = \frac{Kl}{Cd} Nn.$$

Les deux valeurs de Gh sont égales; d'où il suit que toutes les droites IK , IK' d'un premier mode de génération du paraboloidé réglé, sont rencontrées par toutes les droites MN , $M'N'$ du second mode de génération; ce qui prouve 1° que le paraboloidé peut être engendré par une droite mobile de deux manières différentes;

2° Que dans chaque mode de génération, le mouvement de la droite gé-

néatrice est déterminé ou par la condition de s'appuyer sur trois droites fixes, parallèles à un même plan, ou par les deux conditions de s'appuyer seulement sur deux droites fixes, et de rester parallèle à un plan directeur donné.

Du plan tangent à l'hyperboloïde à une nappe, et au paraboloïde hyperbolique.

144. On vient de démontrer que ces deux surfaces peuvent être engendrées par une droite de deux manières différentes; un point quelconque de ces surfaces est donc l'intersection de deux droites appartenant aux deux systèmes de génération; d'où il suit que le plan tangent en ce point est déterminé par ces deux droites. Si l'on conçoit sur chaque surface trois droites d'un même système, un plan quelconque mené par l'une de ces droites, et tournant autour d'elle comme charnière, sera dans toutes ses positions tangent à la surface; mais le point de contact variera, et pour l'obtenir il faudra prolonger le plan tangent jusqu'à ce qu'il coupe les deux autres droites du premier système : la droite qui joindra les deux points d'intersection appartiendra au second système de génération, et coupera la droite du premier système par laquelle on a mené le plan tangent, au point de contact de ce plan et de la surface.

Lorsque le point de contact sera donné sur une droite du premier système, on construira (art. 42) la droite qui passe par ce point et qui coupe deux autres droites quelconques du même système; cette transversale et la droite connue du premier système déterminent le plan qui touche la surface au point donné sur cette droite.

Lorsque les plans directeurs du paraboloïde seront connus, la position de la transversale sera déterminée par la condition de couper deux droites de l'un des systèmes, et d'être parallèle au plan directeur qui correspond à l'autre système de lignes droites appartenant à la surface.

145. Toutes les droites menées dans l'angle formé par les deux droites qui déterminent le plan tangent de l'hyperboloïde à une nappe ou du paraboloïde hyperbolique, sont des sécantes de ces surfaces; d'où il suit qu'un plan n'est tangent à l'hyperboloïde que suivant un élément infiniment petit, et en un seul point, limite de cet élément; en tout autre point des deux droites de la surface par lesquelles il passe, il est sécant, tandis que le plan tangent à une surface réglée développable, est tangent dans tous les points de la droite par laquelle il passe.

Des sections planes du paraboloïde hyperbolique.

146. Les sections planes d'un paraboloïde hyperbolique ne peuvent pas être des courbes fermées; elles sont ou des paraboles ou des hyperboles; car quel que soit le plan coupant, deux droites de la surface seront parallèles à ce plan, et les points de la courbe d'intersection situés sur ces droites, seront à l'infini. Pour le prouver, concevons que le plan coupant et les deux plans parallèles aux deux systèmes de droites du paraboloïde se rencontrent; nommons p et q les droites d'intersection de ces plans; A, A' les côtés opposés du quadrilatère gauche (art. 143) qui détermine le paraboloïde, B, B' les deux autres côtés. Toutes les parallèles aux droites p et q seront parallèles au plan coupant: or, il y a deux droites, l'une parallèle à p , l'autre à q , qui s'appuient, la première sur les directrices A, A' , la seconde sur les directrices B, B' ; car, si, par la directrice A et une parallèle à la droite p , on imagine un plan qui coupe la directrice A' en un point, une autre parallèle p' à la droite p menée par ce point, s'appuiera sur les directrices A, A' et sera parallèle au plan des deux directrices B, B' et au plan coupant, plans qui par hypothèse se rencontrent suivant la droite p .

Par la même raison, la directrice B et une parallèle à la droite q , détermine un plan qui coupe la directrice B' en un point, par lequel on conçoit une parallèle q' à la droite q ; cette parallèle s'appuiera sur les directrices B, B' , et sera parallèle au plan des deux directrices A, A' et au plan coupant. Mais les deux droites p', q' , l'une parallèle au plan des deux directrices B, B' , l'autre au plan des deux directrices A, A' , appartiennent à la surface du paraboloïde, et sont parallèles au plan coupant; donc elles contiennent des points de la courbe d'intersection du paraboloïde et du plan donné, qui sont situés à l'infini; d'où il suit que le plan donné, quel qu'il soit, ne peut couper le paraboloïde suivant une courbe fermée.

Les deux droites p', q' se réduiront à une seule, lorsque le plan coupant sera parallèle à la droite d'intersection des deux plans, l'un parallèle aux côtés A, A' du quadrilatère gauche, l'autre aux côtés B, B' de ce quadrilatère. Dans ce cas, la section du paraboloïde sera une parabole, c'est-à-dire l'une des sections coniques qui s'étend à l'infini, et n'a pas d'asymptotes. Connaissant, dans le cas d'une section hyperbolique, les droites p', q' de la surface parallèle au plan coupant, on déterminera les asymptotes de cette section par des considérations semblables à celles qui ont servi à trouver les asymptotes des sections de l'hyperboloïde de révolution (art. 131).

En effet, le plan mené par la droite p' parallèlement au plan des deux di-

rectrices B, B' , ne rencontre aucune des droites de la surface parallèle à ce plan, et il est tangent à la surface; le point de contact est donc situé à l'infini : d'où il suit qu'il rencontre le plan coupant suivant l'asymptote de la section contenue dans ce dernier plan. Par la même raison, le plan mené par la droite q' parallèlement au plan des deux directrices A, A' ne rencontre aucune des droites de la surface parallèle à ce plan, et il est comme tout plan qui passe par une droite de la surface, tangent à cette surface (art. 144); donc le point de contact est situé à l'infini. Les intersections du plan coupant et des deux plans tangens pour lesquels le point de contact est situé à l'infini, déterminent les deux asymptotes qui, d'après cette construction, sont parallèles aux droites p', q' . Lorsque ces droites p', q' se réduisent à une seule, elles sont à une distance infinie des deux plans parallèles aux deux systèmes de droites; un troisième plan qui leur est parallèle, et qui est mené par cette droite, ne rencontre le plan coupant que suivant une droite située à l'infini; d'où il suit que la courbe contenue dans le plan coupant n'a pas d'asymptotes; ce qui indique que cette courbe est une parabole.

Des sections planes de l'hyperboloïde à une nappe.

147. Si l'on prend sur un hyperboloïde cinq droites d'un même système, et que par le centre de cette surface on mène des parallèles à ces droites, le cône elliptique qui passera par ces parallèles jouit de la propriété qu'il n'y a aucune droite sur l'hyperboloïde appartenant à l'un ou l'autre système de génération, qui n'ait sa parallèle sur ce cône, qu'on a nommé par cette raison *cône asymptotique* de l'hyperboloïde. En admettant cette proposition comme démontrée, et ayant construit le cône asymptotique dont on connaît le sommet, et cinq points de sa base situés sur les cinq arêtes données, on pourra reconnaître l'espèce de courbe qui résulte de l'intersection de l'hyperboloïde et d'un plan donné. Ayant mené par le sommet du cône un plan parallèle au plan coupant, ou ce plan n'aura de commun avec le cône que le sommet, ou il lui sera tangent, ou enfin il sera sécant, et il contiendra deux arêtes du cône; les sections correspondantes à ces trois cas seront ou des ellipses, ou des paraboles, ou des hyperboles.

Supposons que la section soit une hyperbole; alors deux droites de l'hyperboloïde à une nappe sont parallèles au plan coupant, et déterminent les asymptotes de l'hyperbole. En effet, désignons par A la première de ces droites, et par B, C deux autres droites quelconques de l'hyperboloïde, appartenant au même système de génération.

Tout plan (art. 144) passant par A coupe les droites B et C en deux points;

la droite qui joint ces deux points, et la droite A fixent la position d'un plan tangent à la surface, et se coupent au point de contact de la surface et du plan. Si par les droites B et C , et parallèlement à la droite A , on mène deux plans, l'intersection de ces plans sera parallèle à A , et s'appuiera sur les droites B et C ; donc si par cette droite d'intersection et par la droite A on mène un plan, il sera tangent à la surface en un point de cette droite A situé à l'infini; donc (art. 131) l'intersection de ce plan et d'un plan coupant parallèle à la droite A , sera l'asymptote de l'hyperbole. En opérant de la même manière sur la seconde droite A' de la surface, parallèle au plan tangent, on construira deux autres droites quelconques B' , C' du même système de génération; on mènera par ces droites des plans parallèles à la droite A' : l'intersection de ces plans et la droite A' détermineront un second plan tangent, dont le point de contact sera situé à l'infini, et qui coupera le plan de l'hyperbole suivant la seconde asymptote.

Le cône asymptotique de l'hyperboloïde à une nappe, devient un cône droit à base circulaire, lorsque cet hyperboloïde est de révolution (art. 130).

148. La théorie que nous venons d'exposer conduit à ce résultat, que l'hyperboloïde à une nappe comprend comme cas particuliers l'hyperboloïde de révolution et le paraboloid hyperbolique; que ces trois surfaces peuvent être engendrées de deux manières différentes par une droite mobile; qu'elles sont divisées en une infinité de petits quadrilatères gauches par les deux systèmes de droites génératrices; enfin, que les aires comprises entre deux droites consécutives d'un même système de génération, sont des *éléments gauches* qui s'étendent indéfiniment dans le sens des droites qui les comprennent. Nous allons maintenant prouver que la surface réglée la plus générale, telle que nous l'avons définie (art. 52), et l'hyperboloïde à une nappe, peuvent par un choix convenable des droites directrices de cette seconde surface, avoir en commun un ou deux éléments gauches consécutifs, suivant lesquels l'hyperboloïde est tangent à la surface réglée générale; c'est par cette raison que l'hyperboloïde à une nappe est à l'égard des surfaces réglées ce que le plan est par rapport aux surfaces développables: il n'y a aucune surface réglée qu'on ne puisse regarder comme l'enveloppe de l'espace que parcourt un hyperboloïde à une nappe.

Des plans tangens à la surface réglée générale.

149. Soient (*pl. suppl. A, fig. 8*) $AB, A'B', A''B''$ trois courbes quelconques directrices d'une droite mobile $AA'A''$; la surface réglée dont cette droite est la génératrice, a pour l'un de ses élémens gauches l'aire $AA'A''aa'a''$ comprise entre deux positions consécutives $AA'A'', aa'a''$ de la droite mobile. Quelle que soit la surface engendrée par cette droite, qui a pour directrices les trois courbes $AB, A'B', A''B''$, on conçoit qu'ayant mené par les trois points A, A', A'' trois autres courbes quelconques $AC, A'C', A''C''$ de la surface, on pourra prendre ces nouvelles courbes pour directrices de la droite mobile. La seconde surface, engendrée dans cette hypothèse, ne différera pas de la première, puisque les droites $AA'A'', aa'a'', BB'B'',$ qui s'appuient sur les directrices $AB, A'B', A''B''$, rencontrent d'autres courbes de la première surface, telles que $AC, A'C', A''C''$, qui passent par les points A, A', A'' . Mais en ne considérant que l'élément gauche $AaA'a'A''a''$, il est évident que la droite $aa'a''$ de cet élément s'appuie sur les tangentes aux trois premières directrices $AB, A'B', A''B''$, et que la droite $aa'a''$ qui s'appuie sur les tangentes aux trois nouvelles directrices $AC, A'C', A''C''$, appartient au même élément, puisque toutes les tangentes à la surface menées par les points A, A', A'' sont comprises dans les plans tangens en ces points; donc si l'on mène trois plans tangens en trois points A, A', A'' d'une droite d'une surface réglée, et dans chacun de ces plans une droite qui passe par le point de contact, on aura trois droites qu'on pourra prendre pour les directrices d'un hyperboloïde, qui sera tangent à la surface réglée, suivant l'élément gauche $AA'A''aa'a''$.

Ainsi, quelle que soit une surface réglée, il y a une infinité d'hyperboloïdes à une nappe qui ont un élément commun avec cette surface, et qui lui est tangent suivant la droite qui termine cet élément. Chacun de ces hyperboloïdes a pour directrices de sa génératrice, trois droites menées arbitrairement dans trois plans tangens de la surface réglée, par trois points de la droite de contact de cette surface et des hyperboloïdes. Tous ces hyperboloïdes n'ont de commun avec la surface réglée que deux droites consécutives de cette surface, hors un seul qui passerait par trois droites consécutives de la surface réglée, qui aurait avec cette surface un contact plus immédiat, et que j'ai nommé par cette raison *hyperboloïde osculateur*.

150. Les hyperboloïdes à une nappe, tangens à une surface réglée suivant une droite, deviennent des paraboloides hyperboliques, lorsque les droites directrices prises dans les trois plans tangens, sont parallèles à un même plan. Soient A, A', A'' (*pl. suppl. A, fig. 8*) trois points quelconques d'une droite

$AA'A'$ d'une surface réglée; on mène par ces points les plans tangens à la surface, et par les mêmes points, trois plans parallèles quelconques, qui coupent les plans tangens suivant trois droites; prenant ces dernières droites pour directrices, la droite mobile engendre un paraboloïde; et comme la direction des plans parallèles est arbitraire, il s'ensuit qu'il y a une infinité de paraboloïdes qui sont tangens à la surface réglée suivant l'élément $AA'a'a$. Parmi ces paraboloïdes tangens, il y en a un dont les directrices sont perpendiculaires à la droite donnée $AA'A'$. On détermine ces directrices, en menant par les trois points A, A', A'' des plans parallèles, perpendiculaires à la droite $AA'A'$, qui coupent les plans tangens aux mêmes points A, A', A'' , suivant trois droites qui sont évidemment parallèles à un même plan, et perpendiculaires à la droite $AA'A'$ de la surface réglée.

Du plan tangent en un point quelconque d'une surface réglée.

151. Soit M (*pl. suppl. A, fig. 8*) un point donné sur une surface réglée; on suppose que la droite $AA'A'$ de la surface qui passe par ce point soit connue, et que les plans tangens en trois points A, A', A'' de cette droite soient déterminés. On mène dans ces plans trois droites quelconques directrices $AA', A'A'', A''h$; par deux points g, k pris à volonté sur la première directrice AA' , on fait passer deux droites gfe, kih qui s'appuient sur les deux autres directrices. La droite gfe et le point donné M de la surface déterminent un plan qui coupe la droite kih au point n ; joignant les points n et M par une droite Mn , le plan conduit par les deux droites $MA'A$ et Mn , sera le plan tangent de la surface réglée au point M de cette surface.

En effet, ce plan sera (art. 147) tangent à l'hyperboloïde qui a pour directrices les trois droites $AA', A'A'', A''h$; or cet hyperboloïde est tangent à la surface réglée (art. 149), suivant la droite $AA'A'$; donc le plan (MA, Mn) est aussi tangent à cette surface.

Si l'on eût pris les trois droites $AA', A'A'', A''h$ parallèles à un plan donné, l'hyperboloïde construit sur ces droites comme directrices, se changerait en paraboloïde, et le plan tangent au point M de ce paraboloïde serait aussi tangent à la surface réglée.

Nous allons appliquer cette méthode à des surfaces réglées particulières, dont on fait usage en architecture pour la construction de quelques voûtes.

EXEMPLES DE PLANS TANGENS AUX SURFACES RÉGLÉES, ET DE TANGENTES AUX
SÉCTIONS PLANES DE CES SURFACES. (Pl. 17.)

Premier exemple. — Plan tangent à la surface réglée qu'on nomme conoïde.
(Pl. 17, fig. 2.)

152. La surface réglée qu'on nomme *conoïde*, est engendrée par une droite mobile toujours horizontale, qui s'appuie sur deux directrices dont l'une est une droite verticale, l'autre une courbe donnée dans un plan vertical. Cette surface termine une petite voûte ou *porte*, qu'on appelle en coupe des pierres *voûte conoïde*.

Soit (pl. 17, fig. 2) la verticale $(A, A'a)$ directrice de la droite mobile horizontale; la seconde directrice est un cercle BaC qui est donné dans le plan vertical XY , et qu'on prend pour la base du conoïde. Le centre A' de ce cercle est sur l'intersection XY des deux plans de projection; d'où il suit que les horizontales AB, AC sont les traces du conoïde sur le plan horizontal de projection. Les projections horizontales de toutes les droites de la surface passent évidemment par le point A .

Un plan vertical XY' , parallèle au plan vertical de projection, coupe le conoïde suivant une courbe $(DE, D'E'a)$, et on demande la tangente à cette courbe en un point donné, dont la projection horizontale est le point M de la droite DE ? La droite du conoïde qui passe par ce point, a pour projection horizontale la droite AML ; elle rencontre la base circulaire au point l ; d'où il suit qu'elle a pour projection verticale l'horizontale ll' ; élevant la perpendiculaire à XY , qui coupe la droite ll' au point m , ce dernier point appartient à la courbe $(DE, D'm'E')$: on construirait de la même manière tout autre point de cette courbe.

Connaissant la droite (AML, ll') du conoïde, qui passe par le point (M, m) de cette surface, on construira les directrices d'un paraboloïde tangent au conoïde suivant cette droite. Deux directrices suffiront (art. 144), parce que la droite génératrice du paraboloïde sera constamment horizontale, comme la droite génératrice du conoïde. L'une de ces directrices est la tangente ll' du cercle, menée par le point l où la droite (AML, ll') rencontre ce cercle. Pour obtenir l'autre directrice, il faut remarquer que le plan tangent au point (A, a) de la droite (AML, ll') , passe par cette droite et par la verticale $(A, A'a)$ qui se croisent en ce point: or ce plan est coupé par le plan vertical $X'Y'$, parallèle au plan vertical de projection, suivant la verticale $(A, A'a)$; donc les directrices du paraboloïde, situées dans les plans verticaux parallèles $XY, X'Y'$,

sont 1^o la verticale $(A, A'a)$; 2^o la tangente hA du cercle BaC . Mais cette tangente coupe le plan horizontal de projection au point h ; d'où il suit que la trace du paraboloïde sur ce plan est la droite Ah . Le plan vertical XY de la courbe $D'aE'$ rencontre la trace Ah au point G , dont la projection sur le plan vertical est G' ; ce qui détermine la droite (MG, mG') du paraboloïde. Menant par le point G la droite NGO parallèle à l'horizontale $(Al, l'l')$, cette droite sera la trace horizontale NGO du plan qui touche le paraboloïde au point (M, m) . Ce plan tangent est coupé par le plan $X'Y'$ de la courbe $D'aE'$, suivant la droite $(GM, G'm)$; donc la projection verticale $G'm$ de cette droite est tangente à la courbe $D'aE'$. On déterminerait de la même manière la tangente $\mu'F'$ au point μ' de cette courbe, situé sur l'horizontale ll' .

Il est à remarquer que l'on peut prendre pour directrices du paraboloïde tangent au conoïde suivant l'horizontale $(AMI, l'm\mu')$, les deux horizontales $(Ah, h'h')$, (AA', i') : or le plan vertical XY de la section $D'aE'$ du conoïde, coupe la seconde directrice (AA', i') au point (I, i') ; d'où il suit que la droite $(GMI, G'mi')$, qui appartient au conoïde, est aussi dans le plan tangent au point (M, m) de ce conoïde, et que la tangente $G'm$ au point m de la courbe $D'aE'$ passe par le point i de la verticale $A'i$.

Deuxième exemple.—*Plan tangent à la surface du biais passé.* (Pl. 17, fig. 3.)

153. Cette surface est engendrée par une droite mobile, qui a pour directrices deux cercles et une ligne droite. Soient $XY, X'Y'$ les traces parallèles de deux plans verticaux sur le plan horizontal de projection; ces plans contiennent deux cercles des diamètres AB, CD , dont les centres α, β sont sur une droite as inclinée par rapport aux traces $XY, X'Y'$. Les diamètres AB, CD forment avec les droites AC, BD un parallélogramme qui est divisé en deux parties égales par la droite EF parallèle à AB . Par le milieu G de cette droite, on élève une perpendiculaire $IGHF$ aux plans des cercles, qu'on prend pour la troisième directrice de la surface du biais passé. Un plan quelconque mené par cette horizontale IGH , coupe le plan vertical XY suivant la droite HAH , qui rencontre le premier cercle du diamètre CD au point L , et le second cercle au point (I, l) ; ces deux points déterminent la droite $(LKN, Hh'l')$ de la surface. Soit (M, m) un point de cette droite, pour lequel on demande le plan tangent à la surface; nous allons d'abord construire les directrices d'un paraboloïde tangent à la surface du biais passé suivant la droite connue $(LKN, Hh'l')$. Les deux premières directrices, situées sur les plans des cercles, sont les droites $(XY, l's)$ et $(X'Y', l')$; la troisième directrice du paraboloïde

située dans un plan $X'Y''$ parallèle à celui des cercles, passe par le point N de ce plan où la droite de la surface rencontre l'horizontale IHN, l'une des directrices de la surface de biais passé. Cette troisième directrice est aussi dans le plan tangent à cette surface au point N, lequel plan a pour traces sur les plans de projection les droites NII, IIM; elle a donc pour projection les droites IIM et $NX'Y''$.

Connaissant les trois directrices (XY, ksV) , $(X'Y', lU)$, $(X'Y'', IIM)$, la position d'une droite qui s'appuie sur ces trois directrices sera déterminée, lorsqu'on donnera un point de cette droite sur la première directrice, par exemple le point V, où la tangente ks rencontre le plan horizontal. Le plan mené par ce point V et par la directrice $(X'Y', lU)$, a pour trace sur le plan horizontal la droite UVO, qui coupe la droite $X'Y''$ au point O; d'où il suit qu'il rencontre le plan vertical $X'Y''$ suivant une droite parallèle à $(X'Y', lU)$, menée par ce point O. La projection de cette droite sur le plan vertical XY, sera donc une parallèle $O'p$ à la tangente lU du cercle $A'B'$, et de plus passera par le point O' , projection de O sur XY. Mais cette parallèle $O'p$ coupe la projection IIM de la troisième directrice $(X'Y'', IIM)$ au point p ; donc le plan qui a pour trace horizontale UVO, coupe cette directrice au point (P, p) . Il résulte de ces constructions que la droite du paraboloïde, qui passe par le point V de la première directrice (XY, Vks) de ce paraboloïde, et par la seconde directrice $(X'Y', U'l)$, a pour projection horizontale la droite VP, et pour projection verticale la droite Vp; ces deux projections partent du même point V de l'intersection XY des plans de projection.

Cette droite (VP, Vp) du paraboloïde tangent rencontre la seconde directrice $(X'Y', U'l)$ au point (Q, q) , déterminé par la rencontre des droites connues $U'l, Vp$ qui se croisent au point q . La perpendiculaire qQ à XY rencontre la droite $X'Y'$ au point Q, situé sur le prolongement de la droite VP.

Maintenant on donne un point (M, m) de la surface, situé sur la droite (LK, IIM) de cette surface, et on demande le plan tangent en ce point?

154. Le plan vertical yzM , mené par le point (M, m) parallèlement aux plans XY, $X'Y'$ des cercles, coupe le paraboloïde tangent à la surface réglée, suivant la droite (MR, mr) ; cette droite et la droite (LMK, lmk) de contact, déterminent le plan tangent au point M du paraboloïde; et puisque par hypothèse le paraboloïde touche la surface réglée au même point, il s'ensuit que le plan conduit par les droites (LMK, lmk) et (MR, mr) est tangent à la surface réglée au point (M, m) de cette surface.

155. Le plan vertical yz coupe la surface du biais passé suivant une courbe qui se projette parallèlement à elle-même en ymw ; l'intersection du plan de cette courbe et du plan tangent au point (M, m) est la droite (MR, mr) ; d'où

il suit que la projection verticale mr de cette droite est tangente à la courbe $\gamma'mud'$ au point m de cette courbe.

Pour construire la courbe $\gamma'mud'$, on remarque 1° que les projections verticales des deux cercles du biais passé, se coupent sur le plan vertical XY au point a , qui est sur le prolongement de la droite IGH , et que toutes les sections de la surface par des plans parallèles à ceux des cercles, se projettent sur le plan vertical XY , suivant des lignes telles que $\gamma'ud'$, qui passent par le point a ; 2° que les droites horizontales AC , BD du biais passé, sont coupées par le plan vertical xy aux points γ , δ , dont les projections verticales sont γ' , δ' . On trouverait tant d'autres points qu'on voudrait de la courbe $\gamma'mud'$, en mettant les droites de la surface en projection horizontale. Soit LMK la projection de l'une de ces droites; elle est coupée par le plan vertical xy au point (M, m) , qui se projette sur le plan vertical XY au point m de la droite HA . Un plan quelconque $HA'I$, mené par la droite IH , coupe les deux cercles donnés aux points K , L ; les perpendiculaires à XY , tirées par ces points, coupent les traces XY , $X'Y'$ des plans verticaux des cercles aux points K' , L' , qui déterminent la projection horizontale KL' d'une autre droite de la surface réglée, et un nouveau point (M', m') de la courbe d'intersection $(xy, \gamma'mm'd')$ de cette surface par le plan vertical xy . Pour construire la tangente au point m' de la ligne $\gamma'mm'd'$, on opérerait comme pour le point m de cette ligne.

Troisième exemple. — Surface réglée de l'arrière-voissure de Marseille. — Définition de cette surface. (Fig. 4, pl. 17.)

156. On mène perpendiculairement à une droite horizontale donnée, telle que IH (fig. 4, pl. 17), deux plans verticaux, qui ont pour traces sur le plan horizontal de projection, les droites XY , $X'Y'$, perpendiculaires à IH : Le premier plan XY contient un cercle donné, dont le centre est en H , et qui a pour diamètre la droite CD . Le second plan $X'Y'$ contient un autre cercle aussi donné, qui a pour corde la droite AB , dont le centre est sur la verticale (I, H_9) , et qui se projette sur le plan vertical XY suivant $A'qB'$; les deux cercles et l'horizontale IH sont les directrices de la droite mobile, génératrice de la surface réglée.

Un plan quelconque (HI') coupe les cercles en deux points (K, k) , (L, l) ; la droite de la surface contenue dans ce plan a pour projection horizontale et verticale, les droites LK , lk . La projection horizontale LK prolongée, coupe l'horizontale IHN au point N , qui appartient à la droite (LK, lk) de la surface. Toute autre droite de la surface rencontrerait la directrice IH en un point qu'on déterminerait de la même manière.

Intersection de la surface de l'arrière-voûture, par un plan vertical parallèle au plan vertical de projection XY.

157. Les droites de la surface ont pour projections verticales des droites qui concourent vers le point H, et pour projections horizontales des droites telles que LKN. Un plan vertical donné xy , coupe la droite (LK, h) au point (M, m), qui se projette sur le plan vertical en m ; le point (M, m) appartient à la courbe d'intersection de la surface par le plan xy . Les droites AC, BD de la surface, qui sont données sur le plan horizontal de projection, et qui concourent vers un point de l'horizontale IH, forment avec le diamètre CD du petit cercle, et la corde AB du plus grand cercle, le trapèze ABCD. Le plan vertical xy coupe les droites AC, BD au point γ , δ , dont les projections γ' , δ' appartiennent à la courbe $\gamma'm\delta'$. Pour construire le point $\downarrow$ de cette courbe, qui est sur le prolongement de la droite IH, on rapporte la flèche $H\delta$ de l'arc A δ B, de I en ϕ sur la droite XY; on joint ϕ' et l'extrémité D du rayon HD par D ϕ' : cette droite D ϕ' coupe la droite xy au point π ; la distance $\pi\pi'$ à l'horizontale IH est égale en longueur à H $\downarrow$. On verra la raison de cette construction, en menant par la droite IH un plan vertical qui coupe les deux plans verticaux des cercles suivant les parallèles HD, L ϕ , et la surface suivant la droite D ϕ' . Il est évident que la verticale $\pi\pi'$ se projette sur le plan vertical XY suivant la droite H $\downarrow$, et qu'on a H $\downarrow = \pi\pi'$.

De la tangente à la section verticale (xy, $\gamma'm\downarrow\delta'$).

158. On détermine la tangente (MR, mr) au point (M, m) de la courbe (xy, $\gamma'm\downarrow\delta'$) par les mêmes opérations qui ont été décrites pour la figure précédente. Les articles (153 - 155) s'appliquent aux deux figures 3 et 4, pl. 17.

159. La surface de la petite voûte, qu'on nomme *arrière-voûture de Marseille*, se compose de deux surfaces réglées qui ont deux directrices communes; savoir, l'horizontale IHN, et le cercle du diamètre CD; leur mode de génération ne diffère que par la troisième directrice. Elles ont aussi deux droites communes, et j'ai fait voir dans mes leçons de stéréotomie à l'École polytechnique, qu'on pouvait les raccorder: ce raccordement consiste en ce qu'elles soient tangentes l'une à l'autre, suivant les droites qui leur sont communes. On démontrera (art. 161) que cette condition est remplie, lorsqu'elles ont mêmes plans tangens en trois points de chacune des deux droites communes.

En nommant *conoïde* une surface réglée dont la génératrice a pour direc-

trices deux lignes courbes et une ligne droite, cette dénomination conviendrait aux deux surfaces du biais passé et de l'arrière-voissure de Marseille, qui ont chacune pour directrice de la génératrice une droite horizontale.

Quoique nous n'ayons considéré que des paraboloides tangens aux surfaces réglées, les problèmes de plans tangens à ces surfaces se résoudreient de la même manière dans le cas général où la surface réglée élémentaire, dont on aurait substitué l'élément à celui de la surface réglée générale, serait un hyperboloïde à une nappe.

Du contact des hyperboloïdes à une nappe et d'une surface réglée.

160. Trois lignes quelconques d'une surface réglée dirigent le mouvement de la droite génératrice de cette surface; les tangentes à ces courbes, menées par les points où une droite quelconque de la surface les rencontre, déterminent un hyperboloïde tangent à la surface suivant cette droite; mais on a démontré (art. 144) qu'un plan qui tourne autour d'une droite d'un hyperboloïde, est dans toutes ses positions tangent à cet hyperboloïde; d'où il suit qu'un plan qui tourne autour d'une droite d'une surface réglée, est aussi dans toutes ses positions tangent à cette surface, puisqu'il serait constamment tangent à un hyperboloïde qui est lui-même tangent à la surface réglée.

Ayant mené un plan quelconque par une droite donnée d'une surface réglée, ce plan est tangent à la surface; mais le point de contact n'est pas connu, et on propose de le déterminer, sans avoir recours à l'un des hyperboloïdes, qui serait tangent à la surface réglée suivant la droite donnée. Pour résoudre cette question, nous désignerons par D la droite donnée de la surface, et par P , un plan mené par cette droite. Nous remarquerons que ce plan P coupe les deux systèmes de droites situées des deux côtés de la droite D , en deux séries de points formant une courbe unique, et que cette courbe rencontre la droite D au point de contact du plan P et de la surface réglée. En effet, désignons par M ce point de contact, par $m, m', m'' \dots$ et par $n, n', n'' \dots$ les deux séries de points, intersections du plan P et des droites de la surface réglée situées des deux côtés de la droite D . Un plan est tangent à cette surface, lorsqu'il passe (art. 44) par les tangentes à deux sections de la surface, qui se croisent au point de contact; mais le point M est l'intersection de la droite qui est sa propre tangente, et de la courbe unique formée par les deux séries de points $m, m', m'' \dots n, n', n'' \dots$; donc le plan P qui contient cette courbe et toutes ses tangentes, ainsi que la droite D , est tangent à la surface réglée au point d'intersection M de la droite et de la courbe.

On construira tant de points qu'on voudra des deux séries $m, m', m'' \dots$

n, n', n'', en approchant continuellement de la droite D; ces deux séries tendront à se réunir au point M de la droite D, vers lequel elles convergent sans pouvoir jamais l'atteindre. Une main habile tracera la courbe avec une exactitude suffisante pour la pratique des arts graphiques, en satisfaisant à la loi de continuité qui lie tous les points d'une même ligne, et à la condition du raccordement, qui consiste en ce que les deux parties de la courbe ont une tangente commune au point cherché M; l'intersection de cette courbe m, m', m'' n, n', n'' et de la droite D détermine le point de contact M.

On déduit de cette considération une méthode graphique pour mener une tangente à une courbe, en plaçant cette courbe sur une surface réglée. (Voy. les *Éléments de géométrie à trois dimensions*, cités page 75.)

161. Ayant mené par une droite d'une surface réglée trois plans quelconques qui la touchent en trois points contigus, il est évident que toutes les droites menées dans ces plans par les points de contact, seront tangentes à la surface : or trois de ces droites prises dans les trois plans, déterminent un hyperboloïde tangent à la surface réglée; d'où il suit que deux surfaces réglées qui ont une droite commune et trois plans tangens communs en trois points de cette droite, sont tangentes l'une à l'autre dans tous les points de la droite commune, car elles seraient touchées suivant cette droite par un hyperboloïde qui aurait pour directrices trois droites menées dans les trois plans tangens, par les points de contact de ces plans et des deux surfaces.

162. Les trois plans tangens menés par une droite donnée d'une surface réglée, et les trois points de contact, déterminent une infinité d'hyperboloïdes à une nappe, tangens à la surface suivant la droite donnée. Parmi ces hyperboloïdes, il y en a un très-remarquable; c'est celui qui contient trois droites consécutives de la surface réglée, et qu'on nomme (art. 149) *hyperboloïde osculateur* (*). Il mesure la courbure d'un élément gauche de surface réglée, comme le cercle mesure celle de la courbe dont il est osculateur.

(*) Parmi les plans tangens d'une surface réglée, menée par une droite D de cette surface, trois quelconques de ces plans coupent la surface suivant trois courbes C, C', C'', qui sont rencontrées par la droite D en trois points M, M', M''; les tangentes respectives aux courbes C, C', C'', menées par les points M, M', M'', sont les directrices de la droite génératrice de l'hyperboloïde osculateur.

CHAPITRE IV.

§ I. DES INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES QUI SE PÉNÈTRENT.

163. Deux surfaces définies sont situées, l'une à l'égard de l'autre, de manière qu'elles se pénètrent ; on propose de déterminer la forme et la position de leur intersection, c'est-à-dire de la ligne suivant laquelle elles se pénètrent. En concevant par chaque point de cette ligne un plan qui coupe à la fois les deux surfaces suivant deux courbes, il est évident que si ces deux courbes étaient construites, le point où elles se rencontreraient appartiendrait à la ligne d'intersection des deux surfaces : or, d'après le chapitre précédent, on sait construire et tracer les sections planes d'une surface, soit qu'on les représente sur les plans de projection, ou qu'on développe les plans qui les contiennent ; donc on trouvera tant de points qu'on voudra de la ligne d'intersection des deux surfaces. Lorsque les sections des deux surfaces par un même plan ne se rencontrent pas, quoique les surfaces se pénètrent, on doit en conclure que le plan des deux sections et la courbe de pénétration n'ont aucun point commun. On choisit dans chaque cas particulier le système de plans coupans le plus convenable, pour réduire autant que possible le nombre et la longueur des lignes de construction. Ce choix étant fait, une autre question se présente ; il s'agit de déterminer les plans limites entre lesquels la courbe d'intersection des deux surfaces est comprise.

Lorsque les deux surfaces qui se coupent sont coniques par exemple, on fait usage d'un système de plans coupans qui passent par les sommets des deux cônes et par des points de leurs bases. Il en résulte que chaque plan coupe les cônes suivant des droites qui se rencontrent en des points de l'intersection des deux surfaces. C'est par la même raison qu'ayant à trouver l'intersection de deux surfaces cylindriques, on les coupe par des plans parallèles aux génératrices de ces cylindres.

Soient S , S' les deux surfaces qui se pénètrent : si la surface S a pour génératrice une courbe plane, chacun des plans dans lesquels cette courbe se trouve successivement, coupe la surface S' suivant une autre courbe ; les points communs aux deux courbes situées dans le même plan, appartiennent évidemment à la ligne d'intersection des deux surfaces courbes S et S' .

Une ligne étant donnée sur la surface S , on peut demander le point de rencontre de cette ligne et de la surface S' . Dans le cas où la ligne donnée est droite, un plan quelconque mené par cette droite, coupera la seconde surface suivant une courbe; les points communs à cette courbe et à la droite donnée appartiendront à la ligne d'intersection des deux surfaces. Lorsque la ligne donnée sur la surface S est une courbe à double courbure, on placera cette courbe sur une surface réglée développable ou non développable; chaque droite de cette surface sera rencontrée par la surface S' en un ou plusieurs points qui appartiendront à la courbe d'intersection de la surface réglée et de la surface S' ; les points communs à cette courbe et à la ligne donnée de la surface S , sont ceux où cette dernière ligne rencontre la surface S' .

164. Deux surfaces courbes qui se pénètrent, étant définies, la recherche des points de la ligne de pénétration, dépend de l'intersection des deux surfaces par des plans menés suivant une certaine loi; il n'y a pas de règle générale pour déterminer le meilleur système de plans coupans, ni pour trouver les plans limites de ce système. La solution de ces questions serait encore plus indéterminée si l'on substituait aux plans coupans un système de surfaces courbes de même nature et de dimensions variables, dont chacune satisferait à la condition de passer par deux courbes tracées sur les deux surfaces proposées, qui se rencontreraient en un point de la ligne d'intersection de ces deux surfaces. Cette substitution présente néanmoins dans quelques cas particuliers des avantages, surtout lorsque les surfaces courbes substituées aux plans ne varient que par une seule dimension. Prenons pour exemple deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent; on substitue aux plans coupans des sphères variables de rayon et concentriques, dont le centre commun est le point d'intersection des deux axes; ce qui revient à considérer chaque point de la courbe d'intersection de deux surfaces comme le point commun à deux cercles d'une sphère, dont le rayon, qui est la dimension variable, est connu.

Deux petits cercles d'une sphère ne se rencontrent pas nécessairement; mais deux cercles qui ne sont pas dans le même plan, et qui se rencontrent, sont nécessairement sur la même sphère. Ainsi, quel que soit le système des surfaces coupantes, les valeurs des dimensions variables doivent être telles, que chaque surface de ce système contienne deux lignes connues, tracées sur les surfaces qui se pénètrent.

La méthode générale que nous venons d'exposer, s'appliquera avec les modifications convenables aux cas particuliers que nous allons examiner.

Des tangentes aux courbes d'intersection de deux surfaces.

165. La tangente en un point de la ligne d'intersection de deux surfaces, est évidemment dans le plan qui touche chaque surface en ce point; d'où il suit qu'on obtient cette tangente par l'intersection des deux plans tangents. Si l'une des deux surfaces est un plan, on a déjà vu (art. 45) que la tangente est l'intersection du plan tangent à la surface et du plan de la courbe.

La tangente à la courbe à double courbure, qui résulte de la pénétration de deux surfaces, peut aussi être considérée comme une droite perpendiculaire aux normales des surfaces menées par le point où la tangente touche la courbe; mais lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux autres droites, et que ces trois droites se croisent au même point, la première est perpendiculaire au plan des deux dernières; donc la tangente de la ligne d'intersection des deux surfaces courbes est perpendiculaire au plan mené par le point de contact, et par les deux normales aux surfaces qui passent par ce même point (*).

EXEMPLES DE SURFACES QUI SE PÉNÈTRENT, ET DE TANGENTES AUX LIGNES D'INTERSECTION.

Premier exemple. — Intersection d'un cône, et d'une sphère qui a pour centre le sommet du cône. (Pl. 18.)

166. Les deux nappes opposées d'un cône étant coupées par la sphère qui a pour centre le sommet de ce cône, la ligne d'intersection est formée de deux branches séparées et symétriquement placées par rapport au centre de la sphère; il suffira de construire l'une de ces branches, par exemple celle qui est située entre le sommet du cône et le plan horizontal de projection: tout ce qu'on dira de cette branche inférieure s'appliquera également à la supérieure.

On conçoit par le sommet du cône une suite de plans verticaux; chacun de ces plans coupe le cône suivant des lignes droites, la sphère suivant un grand cercle; les points communs au cercle et aux lignes droites appartiennent à l'intersection de la sphère et du cône.

(*) Voyez un article de M. Binet (M.-J.), dans la *Correspondance sur l'École polytechnique*, tome III, page 199.

Soit BCDE (pl. 18, fig. 1) la base du cône donnée sur le plan horizontal (A, a'); le sommet du cône ou le centre d'une sphère du rayon $a'l$ ou $a'\lambda$. Un plan vertical quelconque CAE, mené par ce point (A, a'), coupe le cône suivant deux arêtes qui passent par les points C et E, et la sphère suivant un grand cercle. Faisant tourner ce plan autour de la verticale (A, aa') pour l'amener dans le plan vertical FAG parallèle au plan vertical de projection, les points C, E viennent en F et G, et les arêtes du cône qui passent par ces points, se projettent sur le plan vertical en $a'f$ et $a'g$: or ces droites sont rencontrées par le cercle du diamètre $h\lambda$ aux points f', g' , distans de la verticale aa' de $f'q$ et $g'q$. Portant ces distances sur l'horizontale CAE de A en H et en J, ces points H et J appartiennent à la projection horizontale de la courbe d'intersection de la sphère et du cône. Les points correspondans h et i de la projection verticale de cette courbe se trouvent sur les perpendiculaires Hh, Jj à la trace XY des plans de projection, et sur les horizontales $f'h_3, g'i_4$, par conséquent les points de rencontre h, i de ces droites appartenant à la projection verticale de la courbe d'intersection.

167. La tangente à cette courbe au point (J, i) s'obtient par l'intersection des plans tangens aux deux surfaces, menés par ce point. Le plan tangent au cône a pour trace (art. 59) sur le plan horizontal, la droite CP tangente à la base BCDE; le plan tangent à la sphère considérée comme surface de révolution, rencontre le plan horizontal (art. 63) suivant la droite OP perpendiculaire au méridien vertical ACH; les deux traces OP, CP se coupent au point P de la tangente; d'où il suit que les droites PJ, pi sont les projections horizontales et verticales de la tangente au point (J, i) de la courbe d'intersection des deux surfaces.

Pour trouver le point O de la trace horizontale OP du plan tangent à la sphère, on a mené la tangente $g'o$ au grand cercle de la sphère, décrit du point a' comme centre avec le rayon donné $a'l$; cette tangente rencontre la droite XY au point o , distant de la verticale aa' de oa . On a porté cette distance ao de A en O' sur la droite AF, parallèle à XY; l'arc de cercle décrit du point A comme centre avec AO' pour rayon, coupe la droite AE au point O.

168. Dans le cas particulier où la base du cône est une ellipse BCDE, on déterminera les arêtes de ce cône situées dans les plans tangens perpendiculaires au plan vertical de projection, en menant le diamètre BD de l'ellipse conjugué au diamètre qui est parallèle à la droite XY, intersection des plans de projection. Les tangentes Bb, Dd coupent cette droite XY aux points b et d ; les droites $a'b, a'd$ sont les limites de la projection verticale du cône, et comme elles sont aussi les traces verticales des plans tangens au cône,

perpendiculaires au plan vertical de projection, elles touchent (art. 94) la courbe $hikn$ aux points n, k .

Pour déterminer les points de contact n, k , on décrit du point A comme centre avec les rayons AB, AD, les arcs BB', DD' qui coupent la droite FAG aux points B', D', par lesquels on élève les perpendiculaires B'B', D'D' à XY. Tirant les droites a'b', a'd' qui coupent le grand cercle de la sphère du diamètre A, aux points n', k', les horizontales n'n, k'k rencontrent les limites a'b', a'd' de la projection verticale du cône, aux points n et k. Les perpendiculaires nN, kK à XY rencontrent les droites AB, AD aux points N et K de la projection horizontale NKCH de la courbe d'intersection de la sphère et du cône. On construirait les tangentes Nμ, Kμ' aux points N et K de cette projection, comme pour le point J.

169. Il y a encore sur la courbe d'intersection d'autres points remarquables, tels que ceux pour lesquels les tangentes à la courbe sont horizontales. Ces points se trouvent sur les arêtes du cône, qui passent par les pieds des normales qu'on peut abaisser du point A sur l'ellipse BCDE. Soit Aρ l'une de ces normales, sur laquelle se trouve le point (M, m) de la courbe d'intersection de la sphère et du cône; la tangente en ce point est horizontale; d'où il suit que le point m de la courbe $hikn$ est le plus élevé au-dessus du plan horizontal de projection. (L'horizontale kk', sécante de cette courbe, ne paraît tangente sur le dessin, que parce qu'elle se confond avec l'horizontale qui passerait par le point m.)

Les tangentes aux points situés dans les plans verticaux normaux à la base du cône, sont horizontales, parce que les plans tangens au cône et à la sphère, dont elles sont les intersections, se coupent suivant des droites horizontales ou perpendiculaires aux plans verticaux, qui ont pour traces horizontales des droites telles que Aρ normales à l'ellipse base du cône.

170. La courbe $hikn$, construite sur le plan vertical XY, est tangente au grand cercle l'f'g', limite de la projection verticale de la sphère, et pour déterminer les points de contact γ, δ, on mettra en projection verticale les points de rencontre α, β de la droite FAG et de l'ellipse BCDE; ce qui donnera les points α', β', par lesquels on mènera les droites α'a', α'β' qui coupent le grand cercle l'f'g' aux points de contact γ, δ de ce grand cercle de la sphère et de la courbe $hikn$. Cette courbe a un point double α qui se trouve sur une droite α'i, menée par la projection α' du sommet du cône, et par le point i' projection verticale du point i. Ce dernier point est l'intersection de la droite FAG parallèle à XY, et du diamètre BD de l'ellipse. En effet, ce diamètre (art. 168) coupe en deux parties égales l'ordonnée mm' de l'ellipse, et le milieu α étant sur la droite FAG, il s'ensuit que les droites Aα'π', Aα'π'' sont

égales. Considérant ces droites comme les traces de deux plans verticaux qui appartiennent au système de plans qui coupent la sphère et le cône, les arêtes du cône contenues dans ces plans se projettent sur le plan vertical XY , suivant une droite unique $a'a'$, et seront rencontrés par la sphère en deux points situés sur l'horizontale ($u'u''$, u) perpendiculaire au plan vertical de projection. L'intersection des deux droites connues $u'u''$, $a'a'$ détermine le point double u de la courbe $hiklmr$.

Du développement d'un cône à base quelconque (pl. 18). (Dernier exemple de développement de surface.)

171. Nous avons vu (art. 105) que le développement d'un cône droit est un secteur de cercle qui a pour base un arc de même longueur que la base circulaire du cône, et pour rayon la distance d'un point de cette base au sommet du cône. En considérant un cône à base quelconque, plane ou à double courbure, le développement de la partie de ce cône comprise entre son sommet et sa ligne d'intersection par une sphère qui a ce sommet pour centre, est aussi un secteur de cercle de même longueur que la courbe d'intersection de la sphère et du cône, et d'un rayon égal à celui de la sphère. Il faut donc, pour construire ce développement, rectifier la courbe dont on a les deux projections $JNHK$, $inhk$ (fig. 1, pl. 18). Considérant la première de ces courbes comme la section droite d'un cylindre vertical, on la divise en un assez grand nombre de parties, pour que chaque partie soit sensiblement droite.

Le plan vertical $AMR\rho$ coupe la base du cône aux points ρ et ρ' , et contient le point (M, m) de l'intersection du cône et de la sphère, qui est le plus élevé au-dessus du plan horizontal; on prend le plan tangent au cône en ce point (M, m) pour le plan de développement, et on porte sur la droite $R'R'$ (fig. 1.a) les deux parties MJR , MHR (fig. 1) de la courbe, qui est la projection horizontale de l'intersection du cône et de la sphère. Cette courbe étant divisée à partir du point M (fig. 1) en un assez grand nombre de parties, pour que chaque partie puisse être considérée comme une droite, les points M, J, γ', R se placent sur la droite $R'R'$ (fig. 1.a) respectivement en M', J', γ', R' , et les points M, K, H, R (fig. 1) se placent du côté opposé sur la même droite $R'R'$, en M', K', H', R' . On élève par ces points des perpendiculaires qui représentent les distances des points de la courbe d'intersection du cône et de la sphère au plan horizontal; ces distances sont connues par la projection verticale de cette courbe.

Ainsi les ordonnées $R'R'', \gamma'\gamma'', JJ'', M'M'', K'K''$ (fig. 1.a) ont pour lon-

guez respectives, les perpendiculaires abaissées des points r', γ, i, m, k (fig. 1) sur la droite XY. La courbe $R'\gamma J'M'K'$ (fig. 1.a) qui passe par les extrémités de ces ordonnées, fait connaître ce que devient l'une des parties (MJR, *mir*, fig. 1) de la courbe d'intersection de la sphère et du cône, sur le développement d'un cylindre vertical qui la contient; on trouvera de la même manière l'autre partie (MKR, *mk'*) de cette courbe.

La courbe $R'M'R'$ (fig. 1.a) a pour ordonnée *maximale* la droite $M'M'$ qui correspond au point (M, *m*) (fig. 1) de l'intersection des deux surfaces; l'ayant divisée en parties très-petites et sensiblement droites, on rapporte toutes ces parties sur un arc de cercle décrit du point S (fig. 1.b) comme centre, avec un rayon SR' égal au rayon de la sphère qui pénètre le cône. On joint les points de division et le centre S par des droites qui représentent les arêtes du cône. Supposons que l'arc de cercle $R'\gamma J'$ soit de même longueur que la portion de courbe $R'\gamma J'$ (fig. 1.a), la droite $SJ'C$ sera l'arête du cône qui a pour projection (fig. 1) les droites AC, $a'c$, et le point J' (fig. 1.b) représentera le point (J, *i*) (fig. 1) de la courbe d'intersection du cône et de la sphère. Construisant la longueur de l'arête du cône, qui a pour projection les droites AC, $a'c$ (fig. 1), et la rapportant (fig. 1.b) de S en C, le point C appartiendra à la courbe $\rho'C\rho'E'\rho'$, qui est sur le développement du cône, la transformée de l'ellipse BCDE, base de ce cône (art. 96).

La tangente CP (fig. 1) de l'ellipse, et la tangente de la courbe d'intersection au point (J, *i*), forment avec la portion d'arête du cône (CJ, c'), un triangle CJP (fig. 1.b), dont le côté CP est une tangente à la courbe $\rho'C\rho'E'\rho'$; mais chaque tangente de la transformée de la courbe d'intersection, est une tangente de l'arc du rayon SR' (fig. 1.b); donc si l'on construit la longueur de la droite (JP, jp) (fig. 1), et qu'on la porte de J' en P (fig. 1.b) sur la perpendiculaire $J'P$ à SJ' , l'hypothénuse CP du triangle rectangle CJP , sera la tangente de la courbe $\rho'C\rho'E'\rho'$, transformée de l'ellipse base du cône.

Deuxième exemple d'intersection de surfaces. — Deux surfaces cylindriques se pénètrent, et on demande la courbe d'intersection? (Pl. 19.) — Voyez la définition de ces surfaces, page 30, art. 53.

172. Chaque point de la ligne d'intersection de deux surfaces cylindriques est déterminé par la rencontre des deux droites qu'on peut mener par ce point sur les surfaces; or tous ces couples de droites sont situés dans des plans parallèles aux droites génératrices des deux cylindres; donc en comparant les deux surfaces par des plans parallèles à ces génératrices, on construira chaque point de la ligne d'intersection par la rencontre de deux

droites; ce qui est la solution la plus simple qu'on puisse trouver. La direction des plans coupans étant connue, il ne s'agit que de fixer les limites de ces plans; elles dépendent des bases ou des directrices des droites mobiles, génératrices des cylindres. En effet, supposons que ces bases soient des lignes données sur le plan horizontal de projection, telles que les ellipses ABCD, EFGH (*fig. 1, pl. 19*); les parallèles (IK, ik), (IL, il) aux génératrices, menées par un point quelconque ($1, i$) de l'espace, rencontrent le plan horizontal de projection aux points K, L; d'où il suit que les traces horizontales de tous les plans parallèles aux génératrices, seront des parallèles à la droite KL.

Menant les tangentes MNO, PQR aux ellipses ABCD, EFGH parallèles à la droite KL, elles seront les traces des plans coupans limites, c'est-à-dire que tous les points de la courbe d'intersection des deux cylindres seront renfermés entre ces plans. En effet, un plan quelconque parallèle aux génératrices des cylindres, dont la trace horizontale serait en dehors de l'aire comprise entre les deux parallèles MO, PR, ne rencontrerait qu'une seule base, ou n'en rencontrerait aucune. Dans les deux cas, ce plan ne renfermerait aucun point de la courbe d'intersection, puisqu'il ne contiendrait pas des droites appartenantes à l'une et à l'autre surface. Soit donc STUV parallèle à la droite KL, la trace d'un plan coupant qui rencontre les bases des deux cylindres aux points S, T, U, V; on aura les projections des arêtes des cylindres contenues dans ce plan, en menant par les points S, T des parallèles à KI, et par les points U, V des parallèles à LI; ces parallèles se couperont aux quatre points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, qui appartiennent à la projection horizontale de l'intersection des deux cylindres. Abaisant les perpendiculaires SS', TT', UU', VV' sur XY intersection des plans de projection, les parallèles $S'\alpha', T'\beta', U'\gamma', V'\delta'$ à la droite hi , et les parallèles $U'\beta', V'\gamma'$ à la droite li , se coupent aux quatre points $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, qui appartiennent à la projection verticale de la courbe d'intersection; les droites $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ sont perpendiculaires à XY, parce qu'elles joignent les projections des points de cette courbe, situés dans l'un des plans coupans.

Les projections horizontale et verticale de la ligne d'intersection des deux cylindres, se construisent indépendamment l'une de l'autre. Conservant les bases des deux cylindres, on pourrait faire varier les directions de leurs génératrices, de manière que la projection horizontale de l'intersection restant la même, la projection verticale changeât, et réciproquement.

173. La tangente au point tel que (β, β') de la courbe d'intersection, est à la fois dans les plans qui sont tangens aux cylindres suivant les arêtes qui se rencontrent en ce point : or ces arêtes sont ($T\beta, T'\beta'$), ($U\beta, U'\beta'$), et les

plans tangens suivant ces arêtes, ont pour traces horizontales les droites TZ, UZ tangentes aux bases des cylindres; donc le point Z où ces traces se coupent, appartient à la tangente. Tirant Z α du point Z au point donné β , abaissant la perpendiculaire ZZ' sur XY, et joignant les points Z', β , on aura les projections Z α , Z' β de la tangente au point (β , β') de la courbe d'intersection des deux cylindres.

174. On mènera d'autres plans coupans, par les points C, D, G, H où les bases des cylindres sont touchées par les droites CC', DD', GG', HH'. Les plans coupans limites MNO; PQR sont tangens au premier cylindre suivant des arêtes qui passent par les points M, P de la base ABCD, et sont sécans du second cylindre suivant les arêtes qui passent par les points N, O, Q, R de la seconde base EFGH; ces dernières arêtes sont des tangentes à la courbe d'intersection, puisqu'elles sont aussi les droites intersections des plans tangens au second cylindre menés par ces arêtes, et des plans tangens au premier menés par les points M, P de sa base. Mais les arêtes du second cylindre qui passent par les points N, O, Q, R ont pour projections horizontales quatre parallèles à la droite LI menées par ces points, et pour projections verticales quatre parallèles à la droite li menées par les points N', O', Q', R', projections verticales des points N, O, Q, R; d'où il suit que les quatre premières parallèles sont tangentes à la projection horizontale de la courbe d'intersection des deux cylindres, et les quatre autres sont tangentes à la projection verticale de cette courbe.

175. Les projections horizontales des deux cylindres ont pour limites les tangentes DD', CC' menées à la base ABCD, parallèlement à KI, et les tangentes GG', HH' à la base EFGH, parallèles à LI: or ces tangentes sont aussi les traces de plans verticaux tangens aux cylindres, et ces traces sont elles-mêmes des tangentes à la projection horizontale de la courbe d'intersection; donc les droites DD', CC', GG', HH' sont tangentes à cette projection. Le même raisonnement s'applique aux limites des projections verticales des cylindres. Les tangentes aux bases, telles que AA', BB', EE', FF' perpendiculaires à XY, rencontrent cette droite aux points A', B', E', F'; menant par les points A', B' des droites parallèles à li, et par les points E', F' des droites parallèles à li, ces droites A'a, B'b, E'e, F'f sont des tangentes à la projection verticale de la courbe d'intersection.

176. Lorsque deux surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles, se rencontrent, la pénétration a lieu suivant une ou plusieurs droites; dans le cas où les génératrices ne sont pas parallèles, il peut arriver deux cas, ou que les bases des cylindres, c'est-à-dire leurs traces sur le plan horizontal, soient des courbes fermées ou infinies. Si elles sont fermées, la

courbe d'intersection est aussi fermée; si elles s'étendent à l'infini, de manière qu'elles soient rencontrées par tous les plans parallèles aux deux génératrices, la courbe d'intersection s'étend aussi à l'infini.

177. En supposant que les bases des cylindres donnés soient les ellipses ABCD, EFGH qui sont des courbes fermées, la ligne d'intersection est aussi fermée; mais elle peut avoir ou une seule branche, ou deux branches séparées : c'est ce qu'on reconnaît *à priori*, par les traces des plans coupants limites sur les plans des bases.

Lorsque les deux traces sont tangentes à l'une des deux bases seulement, et sécantes de l'autre, comme la *fig. 1, pl. 19* l'indique, le cylindre correspondant à la première base pénètre le second cylindre, de manière qu'il y a sur celui-ci courbe d'entrée et courbe de sortie; mais si les traces des plans sécans limites ne sont pas tangentes à une seule des deux bases données, il n'y a pas pénétration totale, il y a seulement arrachement; la ligne d'intersection est dans ce cas d'une seule branche. On aurait cette branche unique (*pl. 19*), en prenant les droites $\phi\psi$, $\phi'\psi'$ pour les limites des plans sécans; chacune de ces droites est tangente à une base, et sécante de l'autre.

178. Il y a des cas où la pénétration de deux cylindres est une courbe plane. Soit, par exemple (*fig. a, pl. 19*), un cylindre horizontal qui a pour base un cercle vertical du diamètre AB, et dont les arêtes passant par les extrémités A, B de ce diamètre, soient les horizontales ACE, BFD; en coupant ce premier cylindre par un plan vertical CD, et regardant la section comme la base d'un second cylindre dont les arêtes sont parallèles aux droites données CF, DE, il est évident que les deux cylindres se pénétreront, et que la ligne d'intersection sera composée de deux courbes planes, situées dans les plans verticaux CD, EF; ces deux courbes se coupent au point dont O est la projection horizontale; ce point O est l'intersection de deux arêtes horizontales contenues dans le même plan tangent. L'intersection de ce plan et des plans verticaux CD, EF, déterminera les tangentes horizontales de la ligne d'intersection des deux cylindres.

Troisième exemple d'intersection des surfaces. — Pénétration de deux surfaces coniques. (Pl. 20.)

179. Deux surfaces coniques, telles qu'on les a définies page 34, se pénètrent, et on propose de construire leur ligne d'intersection?

On prend pour le système de plans qui coupent à la fois les deux surfaces données, ceux qui passent par les sommets des deux cônes, ou plutôt par la

droite qui joint ces sommets. Chaque point de la courbe d'intersection étant déterminé par la rencontre des deux droites des surfaces, le plan de ces droites contient évidemment la droite qui joint ces sommets, puisque toutes les droites de chaque cône passent par le sommet de ce cône. Réciproquement, un plan conduit par la droite qui joint les deux sommets et qui rencontre les deux bases, contient les droites des cônes, qui se coupent en un point de la ligne d'intersection demandée.

180. Soient (*pl. 20*) (A, a), (B, b) les sommets des cônes qui se pénètrent; DEFG, HIKL les directrices des droites génératrices de ces cônes, données sur le plan horizontal de projection; la droite (AB, ab) qui joint les sommets des cônes, coupe le plan horizontal au point C, par lequel on mène les tangentes CDK, CEL à la directrice DEFG base du premier cône. Ces tangentes sont les traces horizontales des plans coupans limites; le plan coupant dont la trace horizontale serait hors de l'angle DCE, ne rencontrerait pas les deux cônes, et par conséquent ne contiendrait pas de points de l'intersection demandée. Les traces limites CD, CE coupent la directrice HIKL, base du second cône, aux points K, L, extrémités de l'arc KIL, base de la partie de ce cône, qui est pénétrée par le premier cône. Menant les arêtes (BK, bK'), (BL, bL') du second cône, et les arêtes (AD, aD'), (AE, aE') du premier, elles se coupent aux points (M, m), (N, n) de la ligne d'intersection des deux cônes. Les projections horizontale et verticale de ces arêtes sont tangentes aux projections de la ligne d'intersection, parce que ces arêtes peuvent être considérées comme les droites intersections des plans tangens aux cônes, menés par les points (M, m), (N, n).

181. Un plan coupant dont la trace horizontale CRQP est dans l'angle DCE, coupe le premier cône suivant les arêtes (AQ, aQ'), (AR, aR'), et le second cône suivant l'arête (BP, bP'); ces arêtes, situées dans le même plan, se rencontrent aux points (S, s), (T, t) de la ligne d'intersection. On déterminerait de la même manière d'autres points de cette ligne.

On a déjà remarqué (art. 172) qu'en prenant pour plan de projection le plan des bases des cylindres qui se pénètrent, les projections de la ligne d'intersection sur ce plan se construiraient à part, et sans avoir recours au second plan de projection, si ce n'est pour déterminer un plan parallèle aux droites génératrices des deux cylindres; la même remarque s'applique aux cônes. On ne se sert du second plan de projection que pour trouver le point d'intersection de la droite qui joint les sommets des deux cônes et du plan des bases de ces cônes. Cependant, si l'on demandait (*pl. 20*) les points de la projection horizontale de la ligne d'intersection des deux cônes, qui sont sur la droite ABC, trace du plan vertical mené par les sommets des deux

cônes, la projection verticale deviendrait nécessaire. Cette droite ABC, projection horizontale de la droite qui joint les deux sommets, peut être considérée comme la trace d'un plan coupant vertical, qui rencontre chacun des cônes suivant deux arêtes; les projections verticales de ces arêtes se coupent en quatre points de la projection verticale de la ligne d'intersection des deux cônes. Deux de ces quatre points, marqués 3', 4' (pl. 20), sur le plan vertical de projection, déterminent sur la droite ABC les deux points 3, 4 de la courbe MNST, projection horizontale de la ligne d'intersection des deux cônes.

182. La tangente en un point quelconque (S, s) de l'intersection des deux cônes, se trouve dans les plans tangens aux cônes menés par ce point. Le plan tangent au premier cône passe par l'arête qui rencontre le plan horizontal au point Q; d'où il suit que la tangente QV à la base DEFG est la trace horizontale de ce plan tangent. La trace du second plan tangent au même point (S, s) du second cône est la droite PV tangente au point P de la base ILHK; or les deux traces se coupent au point V; donc ce point appartient à la tangente (VS, V's). La droite VS est tangente à la projection horizontale MNST de la ligne d'intersection des deux cônes, et la droite V's est tangente à la projection verticale mnst de cette ligne. Cette projection mnst a encore pour tangente la droite $\delta I'$, limite de la projection verticale du cône à base IKH, et les droites aF' , aG' , limites de la projection verticale du cône à base EFDG. Pour construire le point de contact sur l'une de ces tangentes, par exemple sur aF' , qui correspond à l'arête (AF, aF') du premier cône, on mènera par le point F la trace CF d'un plan coupant; cette trace coupe la base du second cône au point β . L'arête ($B\beta$, $b\beta'$) de ce cône rencontre l'arête (AF, aF') du premier cône au point (α , α'); ce qui détermine le point de contact α' sur la droite aF' , tangente à la courbe mnst.

183. La courbe (MNST α , mnst α') que nous venons de construire, n'est qu'une branche de la ligne d'intersection des deux cônes, car il est évident que le premier cône serait coupé en totalité par la portion du second cône, qui a pour base l'arc δ de la base de ce cône; ce qui formerait une seconde branche de la ligne d'intersection, que l'on doit tracer pour résoudre le problème complètement, mais qu'on a omise (pl. 20) afin d'éviter la confusion des lignes de construction.

De la courbe d'intersection de deux cônes du second degré.

184. On nomme *cônes* ou *cylindres du second degré*, ceux dont les bases sont des courbes planes du second degré, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole (art. 80).

Deux cylindres à bases elliptiques ne peuvent se couper que suivant une courbe fermée, d'une seule branche ou à deux branches séparées; la courbe d'intersection ne s'étend à l'infini que lorsque les deux bases sont des hyperboles ou des paraboles. La condition nécessaire pour que deux cônes quelconques se pénètrent suivant une ligne à branches infinies, c'est qu'ils aient des arêtes parallèles. Chaque point de l'intersection étant donné par la rencontre de deux droites des cônes, il est évident que ce point ne peut être situé à l'infini que lorsque les droites deviennent parallèles. En ne considérant que les cônes du second degré, on peut déterminer *a priori* le nombre de branches infinies de leur ligne d'intersection, et les asymptotes de cette ligne.

Des asymptotes de la ligne d'intersection de deux cônes du second degré.

185. L'asymptote de la ligne d'intersection de deux cônes est la tangente au point de cette ligne situé à l'infini : or ce point est l'intersection des droites des cônes, qui sont parallèles; d'où il suit que les plans tangents aux cônes menés par ces droites se coupent suivant les asymptotes de la ligne d'intersection. Pour déterminer les droites parallèles de deux cônes, on joint leurs sommets par une droite, et, supposant que le premier cône soit fixe, on fait mouvoir le second cône parallèlement à lui-même, de manière que son sommet parcoure la droite dirigée vers le sommet du premier cône. Lorsque les deux sommets sont réunis, on coupe le cône fixe et le cône transporté par un même plan; les courbes qu'on obtient, présentent les cas suivants :

- 1° Elles peuvent se couper en quatre points;
- 2° Se couper en deux points, et se toucher en un troisième;
- 3° Se toucher en deux points;
- 4° Se couper en deux points;
- 5° Se toucher en un seul point;
- 6° N'avoir aucun point commun.

Nous allons examiner ces six cas, et pour distinguer les cônes donnés, nous

appellerons le premier A, le second B, et ce dernier, transporté parallèlement à lui-même, B'; les deux cônes A et B' ont même sommet.

186. *Premier cas.* Les sections des deux cônes A et B' par un même plan, se coupent en quatre points.

Les cônes A et B', dans cette hypothèse, ont quatre arêtes communes qui passent par les points où leurs sections planes se coupent : or ces arêtes ont leurs parallèles sur le cône B; donc l'un des deux cônes A ou B, a quatre arêtes qui ont leurs parallèles sur l'autre cône. Les points à l'infini de leur ligne d'intersection sont situés sur ces arêtes; donc les plans tangens menés par les quatre couples d'arêtes parallèles, se coupent suivant quatre droites, qui sont les asymptotes de la courbe d'intersection des deux cônes. Les asymptotes sont respectivement parallèles aux quatre droites de contact des cônes et des plans tangens aux cônes suivant ces droites.

Deuxième cas. Les sections planes des deux cônes A et B' se coupent en deux points, et se touchent en un troisième.

Dans cette hypothèse, les cônes A et B ont trois arêtes parallèles; les plans tangens à ces cônes, suivant les deux premières arêtes, se coupent en deux droites qui sont asymptotes de la courbe d'intersection. Les plans tangens suivant la troisième arête sont parallèles, et ne se rencontrent pas.

Troisième cas. Les cônes A et B' se touchent suivant deux arêtes; ce qui indique que les cônes A et B ont deux arêtes parallèles, et que leurs plans tangens suivant ces arêtes sont parallèles entre eux; d'où il suit que la courbe d'intersection n'a pas d'asymptote.

Quatrième cas. Les cônes A, B' se coupent suivant deux arêtes; la courbe d'intersection des deux cônes A et B a deux asymptotes.

Cinquième cas. Les cônes A, B' se touchent suivant une arête; la courbe d'intersection s'étend à l'infini et n'a pas d'asymptote.

Sixième cas. Les cônes A et B' n'ont aucune arête qui leur soit commune. Les cônes A et B n'ont alors aucune arête parallèle; toutes les branches de la courbe d'intersection sont fermées, et elles n'ont point d'asymptotes.

En résumé, la courbe d'intersection de deux cônes du second degré a deux ou quatre asymptotes; les branches de cette courbe, qui s'étendent à l'infini, sont ou hyperboliques avec asymptotes, ou paraboliques sans asymptotes.

187. Dans l'intersection de deux cônes du second degré, le nombre de branches fermées, de branches infinies hyperboliques ou paraboliques, dépend de la position respective des deux cônes; de quelque manière que les branches soient combinées entre elles, leurs projections ne peuvent être coupées par une ligne droite en plus de quatre points. Lorsque le sommet de

l'un des cônes est sur la surface de l'autre, alors ce sommet est un des points de la courbe d'intersection; projetant ce point et la courbe sur un plan, la projection du point tient lieu d'une branche. Cet exemple fait voir en géométrie ce que dans la théorie des courbes on entend par point isolé.

Le sommet de l'un des cônes étant sur la surface de l'autre, et ces deux cônes ayant une arête commune, cette arête sera une des branches de la courbe d'intersection, et les branches qui complètent cette courbe ne pourront être coupées qu'en trois points par une ligne droite.

De l'intersection du cône et du cylindre dans le cas où les sections de ces surfaces par un plan sont des courbes du second degré fermées.

188. Pour reconnaître *à priori* si la ligne qui résulte de l'intersection des deux surfaces, le cône et le cylindre du second degré, s'étend à l'infini, on mènera par le sommet du cône une parallèle à la génératrice du cylindre, et on construira le point d'intersection de cette parallèle avec la courbe du second degré, qui est la trace du cône sur l'un des plans de projection. Ou ce point se trouvera hors du contour de la courbe, ou sur ce contour; s'il est hors du contour, on conclura que le cylindre et le cône n'ont aucune arête parallèle, et que la courbe qui résulte de leur pénétration est nécessairement composée de branches fermées; s'il est sur le contour, toutes les arêtes du cylindre seront parallèles à une arête du cône, et le plan tangent au cône suivant cette arête, sera un *plan asymptotique* de la courbe d'intersection du cylindre et du cône.

Quatrième exemple d'intersection de surfaces; pénétration de deux surfaces de révolution. (Pl. 21.)

189. On suppose que deux surfaces de révolution se pénètrent, et on propose de construire leur ligne d'intersection dans le cas particulier où leurs axes se rencontrent? (Pl. 21, fig. 1.)

Les deux axes des surfaces de révolution étant donnés, on prend pour l'un des plans de projection, l'horizontal par exemple, un plan perpendiculaire au premier axe, et pour plan vertical, un plan parallèle aux deux axes.

Nous avons considéré jusqu'à présent chaque point de la ligne d'intersection de deux surfaces, comme le point de rencontre de deux courbes de ces surfaces, contenues dans un même plan, et nous avons déterminé pour quelques cas particuliers le système de plans qui coupent les surfaces proposées suivant les lignes les plus faciles à construire. A ce système de plans coupans,

on substitue quelquefois (art. 164) avec avantage d'autres surfaces coupantes ; les deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent, en offrent un exemple. On considère le point de rencontre de ces axes comme le centre d'une série de sphères qui coupent chacune des deux surfaces suivant des cercles. Les cercles qui ne se couperont pas, ne contiendront pas de points de la ligne d'intersection ; mais il y aura une ou plusieurs sphères coupantes qui contiendront des cercles tangents l'un à l'autre ; les points de contact de ces cercles appartiendront à la ligne d'intersection, et à partir de ces sphères limites, des sphères intermédiaires de même centre et de divers rayons, couperont les surfaces de révolution suivant des cercles qui auront leurs centres sur les axes de ces surfaces, et dont les plans seront perpendiculaires à ces axes. Les deux cercles situés dans deux plans inclinés l'un par rapport à l'autre, ne peuvent se couper que sur la droite intersection de ces plans ; lorsque cette droite coupe l'un des cercles, les points d'intersection appartiennent à la ligne d'intersection des deux surfaces.

Explication de la fig. 1, pl. 21.

190. Soient $(D, D'd')$, (DR, dr) les deux axes de révolution, dont les projections sur le plan vertical de projection parallèle à ces axes, font entre elles l'angle $D'dr$; le plan horizontal de projection est perpendiculaire au premier axe $(D, D'd')$. Le plan méridien ADB , parallèle au plan vertical de projection, coupe les deux surfaces de révolution suivant les courbes $abcc'$, $efgh$, qui se rencontrent aux points a , δ . La sphère du centre (D, d') et du rayon da , coupe les deux surfaces suivant des cercles des diamètres $a\beta$, $a\gamma$, qui se touchent au point (a, a') de la ligne d'intersection. Le premier cercle se projette sur le plan horizontal suivant un autre cercle de même diamètre $a'\beta'$, qui a pour centre le point D . Une autre sphère limite, du rayon $d\delta$, coupe les deux surfaces, suivant deux cercles tangents des diamètres $\delta\phi$, $\delta\psi$, qui se touchent au point (δ, δ') de la ligne d'intersection.

Une sphère intermédiaire d'un rayon dq plus petit que $d\delta$, et plus grand que da , coupe les deux surfaces suivant deux cercles des diamètres ln , pq , dont les plans se coupent suivant une droite horizontale $(m, M\mu)$, perpendiculaire au plan vertical de projection. La projection horizontale $M\mu$ de cette droite rencontre le cercle du rayon DM , moitié de ln , aux points M , μ de la projection horizontale $M\mu a'\delta'$ de l'intersection des deux surfaces. En faisant varier le rayon de la sphère coupante, dont le centre (D, d') est invariable, on trouverait tant d'autres points qu'on voudrait de la ligne d'intersection des deux surfaces ($M\mu a'\delta'$, amd , fig. 1, pl. 21).

De la tangente à la ligne d'intersection des deux surfaces de révolution.

191. La tangente en un point de la ligne d'intersection de deux surfaces de révolution est, comme dans les exemples précédens, la droite intersection des plans tangens à ces surfaces menés par le point qui leur est commun. Chaque plan tangent est en général déterminé par les tangentes à deux sections de la surface; mais dans le cas particulier de la surface de révolution, la tangente à la courbe méridienne en un point quelconque, détermine la droite normale à la surface qui passe par ce point, puisque cette droite est aussi normale à la courbe méridienne. Connaissant les projections de la normale à la surface, on construit les traces du plan tangent à la surface de révolution, en considérant que ces traces sont perpendiculaires aux projections de la normale.

192. Soit (M, m) le point commun à deux surfaces de révolution, par lequel il s'agit de mener des plans tangens à ces surfaces. Le plan tangent à la surface dont l'axe est vertical, se construit comme il a été dit (art. 63; le cercle horizontal du diamètre ln , dont le plan passe par le point (M, m) , coupe la méridienne $abcc'$ au point l , par lequel on mène la tangente lo à cette méridienne. On prend la distance $D'o$ du point o de la droite XY au point D' de la projection de l'axe, qui est sur la même droite, et on la porte sur le méridien vertical DM de D en O ; la perpendiculaire OV à DM est la trace horizontale du plan tangent à la première surface au point $(M, m, \text{fig. 1, pl. 21})$.

Le cercle du diamètre pq , dont le plan est perpendiculaire à l'axe incliné dr , rencontre la méridienne $efgh$ de la seconde surface au point p ; la tangente pr de cette méridienne coupe l'axe dfr au point r , et par conséquent (art. 64) la tangente de la méridienne au point (M, m) a pour projection verticale la droite mr , et la droite MR pour sa projection horizontale. La perpendiculaire pw à la tangente pr , rencontre l'axe dr au point de concours w de toutes les normales à la surface suivant le cercle du diamètre pq ; or ce point de concours a pour projection horizontale le point w' de la droite DR ; donc la normale au point (M, m) a pour projections les droites mw , Mw' . Le plan perpendiculaire à cette normale mené par le même point (M, m) , a pour trace horizontale la droite VT perpendiculaire à la projection horizontale Mw' de la normale; or cette droite rencontre la trace OV du premier plan tangent au point V ; donc la tangente demandée a pour projections les droites MV , mV' .

193. La trace horizontale YT du plan tangent à la seconde surface de ré-

volution, est déterminée par trois conditions, dont deux seulement sont nécessaires. En effet, puisque le plan tangent est perpendiculaire à la normale $(m\omega, M\omega')$, sa trace sur le plan vertical est perpendiculaire à la droite $m\omega$, et la parallèle à cette trace menée par le point (M, m) a pour projection verticale la droite mt perpendiculaire à $m\omega$, et pour projection horizontale la droite MT parallèle à l'intersection XY des plans de projection : or cette parallèle rencontre le plan horizontal au point T ; donc la trace horizontale VT du plan tangent passera par le point T ; première condition. Puisque ce plan est perpendiculaire à la normale dont la projection horizontale est $M\omega'$, la droite VT est perpendiculaire à cette projection; deuxième condition. Enfin, elle passe par le point S où la tangente (MR, mr) , située dans le plan tangent, rencontre le plan horizontal; cette troisième condition dispenserait de construire la droite (MT, mt) , et le point T où elle coupe le plan horizontal.

194. De ce que les normales aux deux surfaces de révolution, menées par le point (M, m) de leur ligne d'intersection, rencontrent les deux axes de révolution aux points ω et ω' , il suit que le plan conduit par ces normales coupe le plan des deux axes, qui est par hypothèse parallèle au plan vertical de projection suivant la droite $\omega\omega'$: or la tangente à la ligne d'intersection au point (M, m) est perpendiculaire au plan des deux normales; donc la perpendiculaire umV abaissée du point m sur la droite $\omega\omega'$, est une tangente de la projection verticale $um\omega$ de la ligne d'intersection des deux surfaces.

Menant par le point (D, d) de la première normale $(MD, m\lambda)$ un plan horizontal qui coupe la seconde normale au point (δ, δ') , la droite $D\delta'$ sera parallèle à la trace horizontale du plan des deux normales; d'où il suit que la projection horizontale MV de la tangente de la ligne d'intersection, doit être perpendiculaire à la droite connue $D\delta'$. Il suffira, pour satisfaire à cette condition, d'abaisser du point M la perpendiculaire MV sur la droite $D\delta'$.

Tout ce qu'on vient de dire sur la tangente à la ligne d'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent, serait encore vrai, dans le cas où les axes ne se rencontreraient pas.

195. Dans le cas général où les axes des deux surfaces de révolution ne se rencontreraient pas, chaque point de la ligne de pénétration de ces surfaces serait l'intersection d'un cercle appartenant à la première surface, et de la section de la seconde surface par le plan de ce cercle. Il serait donc convenable de couper les deux surfaces par un système de plans perpendiculaires à l'axe de l'une d'elles, afin de n'avoir à construire par points, que des courbes de l'autre surface. On a considéré un cas particulier pour lequel les axes de

révolution ne se rencontrent pas, et néanmoins on est parvenu à trouver chaque point de la ligne d'intersection par la rencontre de deux cercles qui sont les projections des sections des surfaces par un même plan. Cette solution particulière est de M. Chapuy, ancien élève à l'École polytechnique (*Voyez la Correspondance sur l'École polytechnique*, tome II, janvier 1811); elle est fondée sur les trois propositions suivantes: 1° Deux surfaces du second degré; quelle que soit leur position respective, sont coupées par des plans parallèles suivant des lignes semblables et semblablement placées; 2° la projection orthogonale d'une ellipse sur un plan passant par son petit axe, est un cercle d'un rayon égal à ce petit axe, lorsque le grand axe se projette suivant une droite égale en longueur au petit axe; 3° l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution, qui ont même centre, et dont les sections circulaires passant par ce centre sont de même rayon, se compose de deux ellipses dont les plans sont perpendiculaires à celui qui passe par les axes de révolution des deux ellipsoïdes.

4° On peut couper les deux ellipsoïdes de révolution par deux couples de plans perpendiculaires à celui des deux axes de ces ellipsoïdes, tels que la section contenue dans l'un des plans du premier couple, par exemple, se projette sur l'autre plan du second couple suivant un cercle.

Intersection de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes ne se rencontrent pas.

196. Soient (*fig. 2, pl. 21*) deux ellipsoïdes de révolution qui se pénètrent, le premier a pour axe la droite AB, et pour section méridienne l'ellipse AHB; cette ellipse a pour grand axe la droite AB, perpendiculaire au demi petit axe OH. On prend pour premier plan de projection celui qui passe par l'axe AB, et qui est parallèle au second axe; on donne la distance de ce second axe au premier, mesurée sur une droite qui leur serait perpendiculaire.

Tout plan perpendiculaire au premier plan de projection, mené par le centre O du premier ellipsoïde AB, coupe cet ellipsoïde suivant une ellipse, dont le grand axe est un diamètre de l'ellipse AEB, et le demi petit axe est égal à OH, demi petit axe de l'ellipsoïde.

Il en serait de même d'un autre plan perpendiculaire au plan de projection, qui passerait par le centre O' du second ellipsoïde. La section serait une ellipse qui aurait pour petit axe une droite égale au petit axe H'A' de l'ellipsoïde, et pour grand axe un diamètre de l'ellipse CDH'A', qui est la section méridienne de ce second ellipsoïde.

197. Soit OE la trace d'un plan quelconque perpendiculaire au premier

plan de projection, qui passe par le centre O du premier ellipsoïde; la section faite par ce plan sur l'ellipsoïde sera une ellipse (E), qui a pour demi grand axe OE, et pour demi petit axe OH. Construisant sur OE comme hypothénuse, avec un côté EG égal à OH, le triangle rectangle EGO, EG sera la trace d'un plan perpendiculaire au premier plan de projection, et en le prenant pour le second plan de projection, l'ellipse (E) s'y projettera suivant un cercle, puisque la projection du grand axe de cette ellipse sera égale au petit axe.

On fera un raisonnement semblable sur le triangle E'O'G', rectangle en G'. Si le côté E'G' est égal au petit axe O'H', l'ellipse (E'), section du second ellipsoïde par le plan O'E', se projettera sur le plan E'G' suivant un cercle, les lignes de projection étant parallèles au côté O'C', perpendiculaire à E'G'; mais il faut que les plans des deux ellipses (E), (E') soient parallèles, et, pour déterminer leur direction, on a recours à l'artifice suivant.

198. On imagine un troisième ellipsoïde de révolution, semblable au second, et dont le petit axe est égal à celui du premier ellipsoïde. Ce troisième ellipsoïde a même centre O que le premier; son grand axe CD', parallèle à l'axe CD du second ellipsoïde, est à cet axe CD dans le rapport des deux petits axes OH, O'H'. On porte sur Oh, perpendiculaire à CD', le petit axe Oh = OH; et pour avoir la longueur OC' du demi grand axe, on fait la proportion :

$$O'H' : Oh :: O'C : OC' = \frac{Oh \times O'C}{OH}.$$

L'ellipse C'AD' du troisième ellipsoïde coupe l'ellipse AHB génératrice du premier, au point E, et on mène la droite OE. Cette droite et le demi petit axe OH déterminent le triangle EOG : or il est évident que le plan EO, perpendiculaire au plan parallèle aux deux axes, coupe le premier et le troisième ellipsoïdes qui sont semblables et ont des axes proportionnels, suivant des ellipses dont les projections sur le plan EG ou E'G', sont des cercles; d'ailleurs, les sections parallèles d'un ellipsoïde sont semblables et semblablement placées; donc en prenant pour plan de projection le plan EG ou E'G', chaque couple de sections faites sur le premier et troisième ellipsoïdes, se projettera sur le plan suivant deux cercles, qui se couperont en deux points de la ligne d'intersection du premier ellipsoïde et de l'ellipsoïde auxiliaire. Ce dernier ellipsoïde est par hypothèse semblable au second, et semblablement placé; d'où il suit que les deux ellipsoïdes donnés seront coupés par des plans parallèles à celui dont la trace est EO, suivant des ellipses dont les projections sur le plan EG ou ses parallèles seront des cercles.

199. Soit $A'B'$ une droite quelconque qui est perpendiculaire au côté OG du triangle EOG , et qu'on prend pour l'intersection commune des deux plans de projection. Supposant que le premier de ces plans, qui contient l'ellipse AHB , soit vertical, la droite OG sera une verticale, et $A'B'$ la projection horizontale du premier axe de révolution AB . La plus courte distance des deux axes étant donnée, on mettra la même distance entre les parallèles $A'B'$, $C'D'$, et cette dernière sera la projection horizontale du second axe. Les sections des deux ellipsoïdes par des plans parallèles à OE , et perpendiculaires au plan vertical de projection, se projetteront sur le plan horizontal suivant des cercles.

Soit la parallèle ed à OE ou $O'E'$, la trace verticale d'un plan qui coupe les deux ellipsoïdes suivant deux ellipses (E) , (E') qui ont pour axes les cordes ed , ed' des ellipses génératrices. Ces axes se projettent, le premier en ed sur la droite $A'B'$, et le second en ed' sur sa parallèle $C'D'$; la distance de ces deux parallèles $A'B'$, $C'D'$ est égale à la plus courte distance des axes de révolution des deux ellipsoïdes. Les cercles décrits sur ed et ed' comme diamètres, sont les projections horizontales des ellipses (E) , (E') , et se coupent en deux points ϕ , ψ qui sont les projections horizontales de deux points de la ligne d'intersection des deux ellipsoïdes; on aurait leurs projections verticales par la rencontre de la droite ed et des perpendiculaires à la droite $A'B'$, ou sa parallèle XY , élevées par les points ϕ et ψ .

200. Les deux ellipses génératrices du premier ellipsoïde donné, et de l'ellipsoïde semblable au second ellipsoïde donné, se rencontrent en quatre points, qui sont placés sur les deux diamètres Ee , $e'e'$, et les plans menés par ces diamètres perpendiculairement au plan avec des axes AB , $C'D'$ des deux ellipsoïdes, contiennent deux ellipses qui sont les lignes d'intersection de ces ellipsoïdes. En général, deux ellipsoïdes qui ont même centre et un axe principal de même longueur, se coupent suivant des courbes planes. On s'est servi du diamètre Ee pour déterminer le triangle EOG , dont le côté EG est la trace du plan sur lequel les sections des ellipsoïdes se projettent suivant des cercles; mais le second demi-diamètre eO ou $e'O$ serait l'hypothénuse d'un triangle eOt rectangle en t , dont le côté Ot déterminerait un second plan, tel que toutes les sections des ellipsoïdes parallèles au plan mené par le diamètre ee' perpendiculairement au plan des deux axes AB , $C'D'$, s'y projetteraient aussi suivant des cercles.

De l'intersection de deux surfaces de révolution qui ont même axe. Construction des points où une ligne quelconque plane ou à double courbure rencontre une surface de révolution dont on connaît la section méridienne.

201. Un plan quelconque mené par l'axe commun aux deux surfaces de révolution, contient les sections méridiennes de ces surfaces. Les points où ces sections se coupent, décrivent en tournant autour de l'axe commun, des cercles qui appartiennent évidemment aux deux surfaces, et sont leurs lignes d'intersection.

Une ligne donnée hors d'une surface de révolution, décrit, en tournant autour de l'axe de cette surface, une seconde surface dont la section méridienne est déterminée. Il est évident que lorsque les deux sections méridiennes se couperont, les points d'intersection détermineront des cercles qui rencontreront la ligne donnée, et les points de rencontre sont ceux où cette ligne coupe la surface de révolution proposée.

C'est sur cette considération qu'est fondée la méthode que nous appliquerons à la recherche des points qu'on détermine par les intersections de trois cônes droits, ou de trois surfaces annulaires (*Voy. liv. II, chap. I, des lieux géométriques*); elle sert aussi à trouver l'intersection d'une surface de révolution et de toute autre surface définie par la forme de la génératrice dans chaque position, et par la loi du mouvement de cette génératrice.

§ II. DE QUELQUES SURFACES DU SECOND DEGRÉ, DONT LA LIGNE D'INTERSECTION EST UNE COURBE PLANE DU MÊME DEGRÉ.

202. On appelle *surface du second degré* celle qui jouit de la propriété d'être coupée par un plan quelconque suivant une courbe du second degré, c'est-à-dire suivant une ellipse, une parabole ou une hyperbole (art. 80). J'ai fait voir que les surfaces du second degré se divisaient en cinq espèces que j'ai nommées : *ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes, paraboloides elliptique, paraboloides hyperbolique*. Ces espèces comprennent, comme cas particulier, les cônes et les cylindres à bases circulaires, droits ou obliques, et l'hyperboloïde de révolution. On a considéré ces dernières surfaces dans les chapitres de ce Traité, relatifs aux plans tangens et aux intersections de surfaces par des plans. Maintenant nous allons examiner quelques cas particuliers dans lesquels deux surfaces du second degré se pénètrent suivant une ou deux courbes planes.

On a déjà vu (art. 195) que deux ellipsoïdes de révolution se pénétraient suivant deux ellipses, lorsqu'ils avaient même centre, et lorsque des plans menés par ce centre perpendiculairement aux deux axes de révolution, les coupaient suivant des cercles égaux.

On conçoit facilement deux cylindres, l'un droit, qui a pour base un cercle, l'autre oblique, qui a pour base une section elliptique du premier cylindre; cette ellipse est évidemment la ligne d'intersection des deux cylindres (*fig. a*, *pl. 19*, art. 178). D'autres exemples, que nous allons rapporter, se présentent fréquemment dans les applications de la géométrie descriptive.

De la pénétration de deux sphères.

203. Deux sphères de rayons quelconques qui se pénètrent, se coupent suivant un cercle. En effet, chaque point de la courbe d'intersection est le sommet d'un triangle qui a pour base la distance des centres des deux sphères, et pour côtés les rayons de ces sphères : or ce sommet, en tournant autour de la droite des centres, passe successivement par tous les points de l'intersection des deux sphères; donc cette intersection est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite des centres, et dont le rayon est la hauteur du triangle constant, formé par la droite des centres prise pour base, et par les rayons des deux sphères.

Un plan est une sphère d'un rayon infini; donc une sphère et un plan se coupent toujours suivant un cercle. On démontre cette proposition directement en supposant qu'on ait mené par le centre de la sphère, et par une perpendiculaire abaissée de ce centre sur le plan donné, une suite de plans qui coupent la sphère suivant un grand cercle, et le plan donné suivant une droite; en ne considérant de cette droite que la portion qui sert de corde à ce grand cercle, les deux extrémités de cette corde appartiennent à la ligne d'intersection de la sphère et du plan : or, dans tous les plans coupans, les cordes du grand cercle de la sphère situées dans le plan donné, sont de même longueur; donc ces cordes sont les diamètres du petit cercle d'intersection de la sphère et du plan.

Ainsi, lorsqu'un plan coupe une sphère, la section est un cercle qui a pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur ce plan. Réciproquement, la droite qui joint le centre d'une sphère et le centre d'un petit cercle de cette sphère, est perpendiculaire au plan de ce petit cercle.

Lorsque deux plans coupent une sphère suivant deux petits cercles, les centres de ces cercles et le centre de la sphère déterminent la position d'un

troisième plan perpendiculaire aux deux premiers. Cette proposition est une conséquence de la précédente, puisque les droites menées par le centre de la sphère et par les centres des petits cercles de la sphère, sont perpendiculaires au plan de ces petits cercles.

De la pénétration d'une sphère et d'un cône oblique. (Fig. s, s', pl. 18.)

204. Le sommet du cône oblique étant donné hors ou dans l'intérieur de la sphère, et supposant qu'il a pour base un petit cercle de cette sphère, la pénétration totale sera composée de deux cercles, dont l'un est par hypothèse la base du cône. Nous allons d'abord démontrer que par deux cercles quelconques d'une sphère on peut faire passer deux cônes obliques.

Qu'on imagine par le centre O de la sphère et par les centres E, F des deux cercles donnés, un plan qui coupe la sphère suivant un grand cercle ABCD (pl. 18, fig. s), et les plans des cercles donnés, suivant les droites AB, CD; les cordes AB et CD du grand cercle ABCD étant les diamètres des cercles donnés, on joindra les extrémités de ces cordes par deux droites AD, BC, qui se rencontrent en G, et par deux autres droites AC, BD, qui se croisent au point G'. Les points G et G' seront les sommets de deux cônes obliques menés par deux cercles qui ont pour diamètres les droites AB, CD, et dont les plans sont perpendiculaires au plan des trois centres O, E, F. Pour démontrer cette proposition, admettons comme une propriété connue du cercle, qu'une corde et un diamètre étant perpendiculaires entre eux, la corde divise le diamètre en deux parties, telles que la moitié de la corde est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diamètre. Ayant mené la droite GIK qui coupe les cordes AB et CD aux points I et K, et regardant cette droite comme la projection d'une arête du cône oblique dont le sommet est en G, il s'agit de faire voir que cette arête s'appuie à la fois sur les deux cercles qui ont pour diamètres les cordes AB et CD.

Supposons qu'elle passe par le point du cercle du diamètre CD, qui se projette en I sur le plan des trois centres E, O, F; la demi-corde de ce cercle, menée par ce même point perpendiculairement au diamètre BD, est moyenne proportionnelle entre les deux parties CI, DI de ce diamètre. Ayant mené par le point I la droite LIM parallèle à AB, les deux triangles DIL, MIC sont semblables; car les angles BAD et DCG ou DCM, qui ont chacun pour mesure la demi-somme des arcs BC, CD sont égaux; mais l'angle BAD est égal à l'angle MLD; donc les deux triangles DIL, MIC ont trois angles égaux. Leur similitude donne la proportion $DI : IL :: IM : IC$; d'où il suit que $DI \times IC = IL \times IM$. Ainsi la demi-corde au point I est moyenne propor-

tionnelle non-seulement entre les droites DI et IC, mais encore entre les parties IL et IM de la droite LM; donc elle est aussi la corde du cercle qui a pour diamètre la droite LM, et dont le plan est perpendiculaire à celui des trois centres E, O, F; mais dans un cône comme dans une pyramide, toutes les sections parallèles sont semblables; donc le plan mené par AB perpendiculairement au plan des trois centres E, O, F, coupe le cône dont le sommet est en G, suivant le cercle du diamètre AB. On démontrerait de la même manière que la droite, qui a pour projection sur le plan des trois centres E, O, F la droite I'G'K', s'appuie sur les deux cercles des diamètres AB et CD; donc par deux cercles quelconques donnés sur une sphère, on peut mener deux cônes obliques, dont les sommets sont sur le plan qui passe par le centre de la sphère et par les centres des cercles donnés.

205. Réciproquement étant donnés un cercle de la sphère, et un point au dehors de cette sphère, le cône oblique qui a pour base le cercle et pour sommet le point, passe par un second cercle de la sphère dont le plan serait perpendiculaire à celui qu'on mènerait par le sommet du cône, le centre de la sphère et le centre du cercle donné. Ce plan coupe le cône suivant deux arêtes, et l'angle compris entre ces deux arêtes est ce qu'on nomme la *section principale* du cône oblique. Cette section jouit de la propriété que l'une des deux arêtes qui la forment, fait avec les plans des deux sections circulaires du cône, des angles qui en général diffèrent entre eux, et qui, dans tous les cas, sont égaux aux angles inverses de l'autre arête de la section principale avec les deux mêmes plans. Dans la *fig. 1*, l'arête AG fait avec les plans des cercles AB, CD, des angles égaux à ceux que l'arête BG fait avec les mêmes plans CD, AB; ainsi étant donné un cône oblique du second degré, on voit d'après ce qui précède qu'il peut être engendré par un cercle de deux manières différentes, et qu'il n'y a aucun point par lequel on ne puisse mener deux cercles situés dans des plans perpendiculaires au plan de la *section principale du cône*, et inversement inclinés par rapport à chaque droite ou arête de cette section.

206. Les plans de deux cercles d'une sphère étant parallèles, le cône qui passe par ces deux cercles, d'oblique qu'il eût été avant le parallélisme, devient un cône droit. Lorsque les deux cercles sont de même rayon et dans des plans parallèles, le cône droit se transforme en un cylindre droit. Une sphère étant traversée par un cylindre à base quelconque, la courbe de pénétration est composée de deux branches égales et symétriquement placées par rapport au plan mené par le centre de la sphère perpendiculairement aux arêtes du cylindre; car il est évident que ce plan divise en deux

parties égales toutes les cordes de la sphère dirigées suivant les arêtes du cylindre.

207. La proposition qui vient d'être démontrée (art. 204) est une conséquence d'une autre plus générale. En effet, l'intersection de deux surfaces quelconques du second degré qui se pénètrent, est en général composée de deux branches; en supposant que l'une de ces branches soit une courbe plane, l'autre branche est encore nécessairement plane. On démontre cette proposition par l'analyse, et on en verra des applications dans la théorie des ombres (liv. II, chap. II).

L'intersection d'une surface quelconque du second degré par un plan, est une courbe du second degré qui jouit de la propriété de ne pouvoir être coupée par une droite qu'en deux points. En admettant cette propriété, on voit que tout plan qui coupera une surface du second degré suivant une droite, passera par une autre droite de cette surface, de sorte que le système de ces deux droites sera la section totale de la surface par le plan. C'est par cette raison que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique peuvent être engendrés par une droite de deux manières différentes. Le plan qui passe par une droite du premier système de génération contient nécessairement une seconde droite appartenant au second système (art. 136 - 143).

208. Il peut arriver que le cône oblique qui coupe une sphère, ait pour sommet un point de cette sphère; alors l'un des cercles d'intersection de ces deux surfaces est réduit au point qui est le sommet du cône. Supposons que la droite AB (*pl. 18, fig. 5*) et le point O restant les mêmes, la droite DC diminue de grandeur en restant parallèle à elle-même, elle se réduira au point H qu'on prend pour sommet du cône, et qui appartient à la circonférence ABCD: or dans cette hypothèse, les droites OH, OF se confondront; donc tout plan perpendiculaire au rayon de la sphère mené par le sommet du cône, coupera ce cône suivant un cercle; ce qui peut encore être démontré de la manière suivante.

Soit ACB (*pl. 18, fig. 5'*) la section principale du cône oblique, qui a son sommet au point C de la surface de la sphère, et pour base le petit cercle du diamètre AB; le plan PQ perpendiculaire au rayon OC de la surface de la sphère, coupe le cône suivant un cercle du diamètre RS, car les angles des arêtes AC, BC avec le plan AB, sont évidemment égaux aux angles de ces mêmes arêtes BC, AC avec le plan PQ ou RS; donc (art. 205) AB et RS sont les traces des plans perpendiculaires à la section principale du cône, qui coupent ce cône suivant des cercles. C'est sur cette propriété du cône qu'est fondée la construction des cartes géographiques, dites *stéréographiques*, que nous expliquerons liv. II, chap. III, de la *perspective*.

§ III. DU CHOIX DES PLANS DE PROJECTION; DÉFINITION ET USAGE DE DIVERS MODES DE PROJECTIONS. (Pl. 22.)

209. On a déjà reconnu l'importance du choix des plans de projection pour la solution des problèmes relatifs aux intersections de surfaces par des plans, ou par d'autres surfaces. L'une des deux projections qui sont nécessaires pour déterminer la ligne d'intersection d'une surface par un plan, se réduit à une ligne droite, lorsque le plan de projection est perpendiculaire au plan coupant. Dans le cas où une surface de révolution est coupée par un plan ou par une autre surface, on choisit pour l'un des plans de projection un plan perpendiculaire à l'axe de révolution; alors tous les cercles de la surface s'y projettent suivant d'autres cercles. Lorsque les axes de deux surfaces de révolution se rencontrent, on prend le plan de ces axes pour le plan vertical par exemple, et le plan perpendiculaire à l'un des axes pour plan horizontal. Si l'on propose de trouver l'intersection de deux cônes (art. 179), il y a quelque avantage à mettre les sommets de ces cônes sur l'un des plans de projection. Lorsque deux cylindres se pénètrent, on simplifie les opérations qui donnent leur ligne d'intersection, en rapportant cette ligne à deux plans, le premier parallèle aux droites génératrices des cylindres, et le second perpendiculaire à l'une de ces génératrices; la *fig. 1, pl. 22*, offre un exemple de ce choix de plans de projection. Deux cylindres droits horizontaux se coupent à angle droit; leurs axes se rencontrent; et la projection de leur ligne d'intersection se compose de deux branches d'une hyperbole.

Intersection de deux cylindres droits horizontaux.

210. Soient EGF, IGK (*fig. 1, pl. 22*) les axes horizontaux de deux cylindres droits qui se pénètrent; le plan de ces axes qu'on prend pour plan horizontal de projection, coupe les deux cylindres, l'un suivant les parallèles AB, CD, l'autre suivant les parallèles AC, BD, qui forment avec les premiers le parallélogramme rectangle ABCD. Le plan vertical XY de projection est perpendiculaire à la génératrice AC ou BD du petit cylindre, et coupe ce cylindre suivant le cercle *efg*, projection verticale de toutes les lignes de cette surface. Un autre plan vertical BD coupe le grand cylindre suivant un cercle du rayon DF, qu'on transporte sur le plan vertical XY, en décrivant du point H', avec le rayon H'f = DF, le cercle *fin*. On va voir le motif de cette transposition.

Un plan horizontal quelconque *mn* coupe les deux cylindres suivant des

droites horizontales qui se rencontrent en des points de leur ligne d'intersection. Les droites du petit cylindre se projetant sur le plan horizontal suivant les parallèles $\phi\phi'$, NN' , les projections des droites du grand cylindre couperaient ces parallèles en quatre points M , M' , μ' , μ'' de la projection horizontale de l'intersection des cylindres. La construction graphique de ces points s'obtient plus simplement, et avec des lignes moins longues, en faisant usage du cercle transposé en fnu . Ayant élevé la verticale ff' , on prolonge l'horizontale μn jusqu'à sa rencontre avec la verticale ff' en m' , et avec le cercle du rayon $H'f$ en n . La partie $m'n$ de l'horizontale se porte en NM , $\phi\mu''$, $N'M'$, $\phi'\mu'$; ce qui détermine les quatre points M , M' , μ' , μ'' . On concevra la raison de cette construction, en regardant la droite NM comme la projection d'un triangle mixtiligne égal à $fm'n$, et comme la trace horizontale d'un plan vertical qui coupe le petit cylindre suivant une droite égale en longueur au côté $m'n$ du triangle, et le grand cylindre suivant un arc égal à l'arc fn , autre côté du même triangle.

211. On déterminerait la tangente au point (M, m) de l'intersection des deux cylindres, comme dans le cas général (art. 173); mais cette méthode des tangentes est en défaut pour les points A , B , C , D de l'intersection, puisque les plans tangens pour l'un quelconque de ces points, C par exemple, sont verticaux, et se coupent suivant une verticale; ce qui réduit la tangente au point C projection de cette verticale. Il faut pour ce point avoir recours au plan des deux normales (art. 165): Les normales en C du petit et du grand cylindre coupent le plan horizontal, l'une en L , l'autre en E ; tirant la droite EL trace horizontale du plan des deux normales, la perpendiculaire CP à EL est la tangente au point C . Les courbes CKD , AIB sont les deux branches d'une hyperbole (*) qui a pour axe réel la droite IK ; elles correspondent à la courbe d'entrée dans le grand cylindre, et à la courbe de sortie; l'intersection totale se projette sur le plan vertical XY suivant le cercle efg .

(*) On démontre cette proposition par l'analyse, en prenant pour axes de coordonnées les droites rectangulaires EF , IK , qui se coupent au point G origine des coordonnées. L'équation du petit cylindre est $x^2 + z^2 = r^2$; celle du grand : $y^2 + z^2 = R^2$. Éliminant z^2 , on a pour l'équation de la projection sur le plan des xy :

$$y^2 - x^2 = R^2 - r^2,$$

équation de l'hyperbole équilatère.

Intersection d'un cylindre et d'une sphère.

212. La fig. 2, ^{pl.} 22, représente l'intersection d'un cylindre et d'une sphère. Le plan horizontal de projection passe par le centre de la sphère et par l'axe d'un cylindre droit à base circulaire; le plan vertical est perpendiculaire à cet axe: la projection verticale de la courbe d'intersection est un cercle, et la projection horizontale une parabole.

Le plan horizontal de projection contient le centre O de la sphère, le grand cercle de cette sphère du rayon OD, l'axe GG' du cylindre et les deux arêtes AC, BD du cylindre droit, qui a pour base le cercle *efg*. Le plan vertical OD coupe la sphère suivant un grand cercle qu'on transporte sur le plan du petit cercle *efg* par un motif semblable à celui qu'on a exposé dans l'exemple précédent. On porte le rayon OD de *f* en H', et du point H' comme centre, on décrit le grand cercle de la sphère, transposé en *fuk* sur le plan vertical XY. Un plan horizontal quelconque *mμ* coupe le cylindre suivant des droites qui se projettent sur le plan horizontal en NN' et *φφ*; l'horizontale *mμ* coupe la verticale *ff'* au point *m'*, le cercle *fuk* au point *n*. Portant la distance *m'n* de la verticale *ff'* au cercle *fuk*, de D en *s* sur le rayon OD, et décrivant du point O comme centre avec le rayon Os une circonférence qui coupe les droites NN', *φφ'* aux points M, M', *μ'*, *μ''*, ces quatre points appartiennent à la projection horizontale de la courbe d'intersection de la sphère et du cylindre. Cette projection se compose de deux branches CMD, AMB, qui appartiennent à une parabole (*) dont le sommet est en S, sur la perpendiculaire OG qu'on abaisse du point O centre de la sphère, sur l'axe GG' du cylindre.

213. La tangente CP en C, se détermine comme dans l'exemple précédent, par la condition d'être perpendiculaire à la tracé horizontale OL du plan des deux droites CL, CO, l'une normale au cylindre, et l'autre normale à la sphère; elle rencontre la droite OG au point P, en sorte que la sous-tangente est C'P. Divisant C'P en deux parties égales au point S, ce point est le sommet de la parabole. (Voyez la note ci-dessous.)

(*) On démontre cette proposition par l'analyse, en prenant le centre O de la sphère pour l'origine des coordonnées, la perpendiculaire OS sur l'axe GL du cylindre, pour l'axe des *x*, et la parallèle à la droite GL pour l'axe des *y*. L'équation de la sphère est : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Appelant *a* la distance OG, l'équation du cylindre est $(x - a)^2 + z^2 = r^2$; R et *r* sont les rayons de la sphère et de la base du cylindre. Éliminant *z*, on a pour l'équation de la projection de l'intersection du cylindre et de la sphère sur le plan des *xy* :

$$y^2 + 2ax - a^2 = r^2 - R^2.$$

Cette équation appartient à une parabole dont le sommet S est à une distance OS du centre O, égale à $\frac{R^2 + a^2 - r^2}{2a}$.

Des projections obliques.

214. Un mode de projection, quel qu'il soit, a pour objet de déterminer la position respective des points situés dans l'espace. La définition d'un mode de projection est complète, lorsqu'on donne la surface sur laquelle on projette, et la loi d'après laquelle on mène par chaque point de l'espace la droite qui projette ce point.

Le mode de projection le plus simple, et le seul dont nous ayons fait usage jusqu'à présent, se nomme *projection orthogonale*. Il consiste à projeter les points de l'espace sur un plan, par des droites perpendiculaires à ce plan. Lorsque les lignes de projection sont constamment parallèles à une droite donnée, et obliques par rapport au plan de projection, ce mode de projection se nomme *projection oblique*. La *projection perspective* désigne le mode pour lequel les lignes de projection concourent vers un point fixe et déterminé.

215. Ces trois projections, orthogonale, oblique, perspective, se font sur des surfaces planes. La proposition suivante s'applique aux trois modes de projection.

« Lorsque deux droites se coupent dans l'espace et comprennent entre elles un angle, le sommet de cet angle a pour projection sur un plan le point d'intersection des projections des deux droites sur le même plan. »

La proposition est vraie pour deux lignes quelconques, planes ou à double courbure, qui se coupent ou se touchent. Si elles se touchent, la projection de leur point de contact est le point de contact des lignes qui en sont les projections.

Cette seconde proposition, *Des droites parallèles ont pour projections des droites parallèles*, est applicable aux deux modes de projections orthogonale et oblique, pour lesquels les lignes de projection sont parallèles; elle n'a pas lieu pour la projection perspective.

On a fait voir (art. 7) que dans la projection orthogonale, les deux projections d'un point sont placées sur une droite perpendiculaire à l'intersection commune des deux plans de projection, en supposant que ces deux plans se confondent en un seul, après avoir tourné autour de la droite suivant laquelle ils se coupent. Cette proposition n'est pas applicable aux projections oblique et perspective. La suivante (art. 21) n'est encore vraie que pour la projection orthogonale : « Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan P, la projection de la droite sur un plan quelconque P', est perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans P et P'. » Les deux modes de projection *oblique* et *perspective* ont pour bases les deux propositions suivantes :

I. « Toutes les lignes tracées sur un cylindre étant projetées sur un plan ou » toute autre surface, par des droites parallèles aux arêtes du cylindre, la » ligne d'intersection du cylindre et de la surface de projection, ainsi que toutes » toutes les lignes du cylindre projetées sur cette surface, coïncident en totalité ou en partie. »

II. « Toutes les lignes tracées sur un cône étant projetées sur un plan ou » toute autre surface, par des lignes concourantes vers le sommet du cône, la » ligne d'intersection du cône et de la surface de projection, ainsi que toutes » les lignes du cône projetées, coïncident en totalité ou en partie. »

L'emploi des projections, oblique et perspective, conduit dans quelques cas particuliers à des solutions plus élégantes que celles qu'on obtiendrait par la méthode des projections orthogonales; en voici quelques exemples (*).

De la projection oblique appliquée à la recherche de l'intersection de deux surfaces, dont l'une est un cylindre. (Pl. 22, fig. 3.)

216. Lorsqu'un cylindre et une autre surface quelconque définie se pénètrent, on trouve leur ligne d'intersection en coupant les deux surfaces par une suite de plans parallèles, et les points où les sections contenues dans un même plan se rencontrent, appartiennent à la ligne suivant laquelle les deux surfaces se pénètrent. En projetant les sections sur un plan fixe, par des droites parallèles à la génératrice du cylindre, la projection de la section du cylindre sera constante; celle de la section de la surface qui pénètre le cylindre sera variable pour chaque plan coupant; mais les parallèles aux arêtes du cylindre, menées par les points où ces projections se couperont, contiendront les points de la ligne d'intersection des deux surfaces; et comme ces points se trouveront aussi sur le plan coupant, ils seront déterminés. Supposons qu'un cylindre dont la génératrice est horizontale, soit pénétré par un autre cylindre incliné; nous allons construire leur ligne d'intersection, et la section du second cylindre par un plan perpendiculaire à sa génératrice.

Explication de la fig. 3, pl. 22.

217. Soit CD l'axe horizontal d'un cylindre à base circulaire; AB la trace horizontale d'un plan vertical qui coupe ce cylindre suivant un cercle du

(*) Cette idée a été développée dans un ouvrage nouvellement publié sous le titre de *Géométrie perspective*; l'auteur de cet ouvrage est M. Cousinery, élève de l'École polytechnique, ingénieur au corps royal des ponts et chaussées. In-4° de 93 pages et 7 planches. Paris, 1828.

rayon AC ou BC. Le cylindre horizontal est pénétré par un cylindre oblique dont la base circulaire $f'gh'$ est dans un plan vertical fh ; le diamètre $f'h'$ de cette base est distant du plan horizontal de projection de la hauteur verticale ff' ou hh' . Les projections horizontales et orthogonales des arêtes du cylindre oblique, qui passent par les points f' , h' , sont les droites fF , hH . Ces arêtes sont dans un plan incliné qui coupe le plan horizontal de projection suivant la droite FH. Un plan vertical fFF' tourne autour de sa trace horizontale fF comme charnière, pour s'abattre sur le plan horizontal; c'est à ce premier plan qu'on rapporte les points de l'espace par des lignes obliques. On prend pour lignes de projection des horizontales parallèles à la génératrice du grand cylindre horizontal; toutes les lignes de ce grand cylindre se projettent suivant la courbe FLF', qui résulte de son intersection par le plan vertical de projection fFF' . La base $f'gh'$ de ce cylindre se projette sur le même plan fFF' , suivant la droite fg' perpendiculaire à fF ; en sorte que le diamètre horizontal $f'h'$ a pour projection oblique le point f'' de la droite fg' , qu'on détermine en faisant $ff'' = ff'$.

L'hypothénuse Ff'' du triangle rectangle Fff'' est la projection oblique du parallélogramme qui a pour côtés opposés les horizontales FH, $f'h'$. Portant $e'g$ en $f'g'$, et menant la parallèle $g'k$ à $f'F$, la projection oblique de l'intersection du demi-cylindre à base $f'gh'$, est la portion Fk de la courbe FLF'; cette intersection a de plus pour projection horizontale orthogonale, la courbe FKH que nous allons construire. Les points F et H de cette courbe sont déterminés sur l'horizontale AA', par la rencontre de cette horizontale et des droites fF , hH . Pour avoir un point intermédiaire M sur la droite MN parallèle à Ef , on considère cette droite MN comme la trace horizontale d'un plan vertical, qui coupe suivant Nm le plan du cercle $f'gh'$. Portant la verticale Nm sur fg' de f en m' , et menant la parallèle $m'm''$ à Ef' , qui rencontre la courbe Fk en m'' , on abaissera de ce point m'' la verticale $m''\mu$, et par le point μ de la droite Ef , on mènera la parallèle μM à FH, qui coupera la droite NM au point M. Un autre plan coupant M'N', parallèle au plan vertical MN, donnerait un autre point M' de la courbe FMM'H.

218. La projection oblique de la section droite ou arc droit du petit cylindre à base $f'gh'$, est sur le plan de projection fFF' , une courbe pqr' qu'il s'agit de construire. Le plan de cette section droite a pour trace sur le plan horizontal de projection, la droite PQ perpendiculaire aux parallèles Ef , Hh , $M'N'$. Un plan vertical quelconque M'N' coupe le cylindre et le plan de l'arc droit suivant deux droites qui sont perpendiculaires entre elles dans l'espace, et dont les projections obliques sur le plan vertical fF se coupent aussi à angle droit : or la projection oblique de la droite du cylindre sur le plan vertical

fF' est $m'm'$; celle du point R est R'; donc si du point R' on abaisse la perpendiculaire R'p' sur $m'm'$, le pied p' de cette perpendiculaire appartient à la projection oblique $qr'p'$ de l'arc droit.

La projection oblique du point Q est Q'; les projections obliques des deux arêtes du cylindre contenues dans les plans verticaux fF , hH se confondent en une seule droite $f'F'$; d'où il suit que les perpendiculaires Q'q, Pp abaissées des points Q' et P sur $f'F'$, déterminent les points p, q de la courbe $p'q$.

C'est au moyen de l'arc droit du petit cylindre oblique, qu'on obtiendrait le développement de ce cylindre, et qu'on y rapporterait les lignes déterminées par les deux projections, l'une verticale oblique, et l'autre horizontale orthogonale. L'épure relative à la voûte qu'on nomme *descente biaise rachetant un berceau*, et que nous avons expliquée dans notre *Cours de Stéréotomie* à l'École polytechnique, se construit de deux manières; l'une par la projection orthogonale, et l'autre par la *projection oblique*. L'intérieur de cette voûte est formé de deux cylindres à bases circulaires, et on trouve toutes les lignes nécessaires pour le tracé de la voûte, par la méthode que nous venons d'exposer.

De la projection perspective. — Exemple fig. 4, pl. 22.

219. Un cône et une surface de révolution se pénètrent; on propose de construire leur ligne d'intersection?

Les deux surfaces étant coupées par une suite de plans perpendiculaires à l'axe de révolution, on considère la section du cône faite par un plan quelconque de cette série comme la base du cône, et on projette sur ce plan les sections circulaires de la surface de révolution, par des lignes concourantes vers le sommet du cône. Les projections des sections circulaires sont évidemment d'autres cercles parmi lesquels on distingue ceux qui rencontrent la base du cône. Par le point où l'un de ces cercles coupe la base du cône, on mène une arête du cône, qui rencontre la section circulaire de la surface de révolution dont ce cercle est la projection perspective, et le point de rencontre appartient à l'intersection de cette surface et du cône.

Explication de la fig. 4, pl. 22.

220. Le plan horizontal de projection, perpendiculaire à l'axe de la surface de révolution, coupe le cône suivant la ligne BCD. Prenant la droite XY pour l'intersection des deux plans de projection horizontal et vertical, le sommet du cône est donné pour ses deux projections orthogonales A et a. On mène par l'axe de révolution (F, f') un plan méridien parallèle au plan

vertical de projection, dont la trace $g'F'h'$ est parallèle à la droite XY . Ce plan méridien coupe la surface de révolution suivant la ligne $ff'gh$, génératrice de la surface; cette génératrice est, par exemple, une ellipse qui tourne autour de son grand axe ff' .

Un plan horizontal quelconque, dont la trace sur le plan vertical de projection est gh , coupe l'ellipsoïde de révolution suivant un cercle du diamètre gh , dont la projection horizontale est un autre cercle $g'o'h'$ du diamètre $g'h' = gh$, qui a pour centre le point F . Le plan de projection *perspective* étant celui de la base BCD du cône, on projette le cercle $(gh, g'o'h')$ par des droites concourantes vers le sommet (A, a) du cône; la projection perspective de ce cercle est un autre cercle du diamètre $GHI = G'I'$, dont le centre K est l'intersection du plan horizontal de projection, et de la droite (AFK, aoK') qui joint le sommet du cône et le centre du cercle à projeter. Le cercle $GHMN$ coupe la base BCD du cône aux points M, N ; les droites menées de ces points M, N au sommet (A, a) du cône, rencontrent le cercle $(goh, g'o'h')$ de la surface de révolution aux deux points (M', m') , (N', n') qui appartiennent à la ligne d'intersection du cône et de l'ellipsoïde de révolution.

Considérant d'autres plans parallèles à gh , et perpendiculaires à l'axe de révolution, on trouverait tant d'autres points qu'on voudrait de l'intersection des deux surfaces données.

S'il s'agissait de trouver l'intersection d'un cylindre, et d'une surface de révolution, on substituerait à la projection perspective la projection oblique, en prenant pour lignes de projection des droites parallèles aux arêtes du cylindre. On trouverait par les mêmes considérations, l'intersection d'un cône ou d'un cylindre par une surface qui aurait pour génératrice une courbe plane de forme constante ou variable, dont le plan se mouvrait parallèlement à lui-même. On prendrait pour base du cône, la section de ce cône par un plan parallèle à celui de la courbe mobile. Dans le cas le plus général, où la surface serait engendrée par une ligne quelconque variable de forme et de position, on couperait cette surface et le cône par une suite de plans parallèles à un plan fixe pris arbitrairement, et la projection perspective de chaque couple de section déterminerait des points de la ligne d'intersection du cône et de la surface.

LIVRE II.

APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Ce livre comprend trois chapitres dans lesquels on expose, 1° l'usage des lieux géométriques, pour résoudre diverses questions relatives aux propriétés de l'étendue; 2° la théorie des ombres; 3° la perspective linéaire : il est terminé par un Appendice sur un art qu'on nomme *Stéréotomie*, et qui a pour objet de transformer un solide donné, en un autre solide terminé par des surfaces planes ou courbes, dont on connaît la génération et les positions respectives.

CHAPITRE PREMIER.

Des lieux géométriques et de leur usage pour résoudre diverses questions.

1. La Géométrie élémentaire offre plusieurs exemples de *lieux géométriques*. Lorsqu'on demande un point situé à des distances connues de deux droites données sur un plan, on trouve ce point par l'intersection de deux droites, dont chacune est un *lieu géométrique* du point demandé. La parallèle à une droite donnée, menée à la distance de cette droite au point inconnu, contient évidemment *ce point*, et par cette raison en est *le lieu*; une autre parallèle à la seconde droite donnée, est encore le *lieu* déterminé du point demandé; d'où il suit que ce point est à l'intersection des deux parallèles. Connaissant les distances d'un point à deux points fixes et donnés, ce point a pour *lieux géométriques* deux circonférences, décrites des points fixes comme centres, avec des rayons égaux aux distances données. Ces circonférences se coupent en deux points, dont chacun satisfait à la condition d'être aux distances connues des points donnés. Dans un triangle dont un côté et l'angle opposé à ce côté sont constans, le sommet de cet angle peut prendre diverses positions, et le lieu géométrique de ce sommet est un arc de cercle, qu'on nomme l'*arc capable* de l'angle opposé au côté donné du triangle.

Enfin la solution de cette question si intéressante pour les commençans, *faire passer un cercle par trois points*, est fondée sur cette considération, que le centre du cercle demandé est l'intersection de trois perpendiculaires, élevées sur les milieux des trois droites qui joignent deux à deux les trois points donnés. Chacune de ces perpendiculaires est un *lieu géométrique* du centre.

En général, on appelle *lieux géométriques* d'un point, les lignes ou les surfaces qui contiennent ce point, et *lieux géométriques* d'une ligne, les surfaces assujéties à la condition de passer par cette ligne. Lorsque les *lieux géométriques* d'un point sont des lignes, deux de ces lignes déterminent le point; lorsque le point a pour lieux géométriques des surfaces, trois de ces surfaces sont nécessaires pour le déterminer. Les exemples suivans feront voir de quelle manière on doit procéder pour résoudre les problèmes de géométrie à trois dimensions, par la considération des lieux géométriques.

PROBLÈME 1^{er}. (Pl. 23.)

Construire le point dont on connaît les distances à trois points donnés?

(Pl. 23, fig. 1.)

2. *Solution.* Tous les points également distans d'un point donné, appartiennent à la surface d'une sphère qui a ce point pour centre. Considérant les trois points donnés comme les centres de trois sphères qui ont pour rayons les distances connues de ces trois points au point inconnu, chaque sphère sera le lieu géométrique de ce dernier point. Deux sphères se coupent (art. 203, livre I^{er}) suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint les deux centres; d'où il suit que les trois sphères se couperont deux à deux suivant trois cercles. Les plans de ces trois cercles passant par une droite perpendiculaire au plan des centres des trois sphères, cette droite coupe chacun des trois cercles aux deux mêmes points, qui satisfont l'un et l'autre à la condition d'être à des distances connues des trois points donnés.

Explication de la fig. 1, pl. 23.

3. Soient A, B, C les trois points donnés; D, D', D'' les distances connues d'un quatrième point aux trois premiers; on prend pour plan horizontal de projection le plan des trois points donnés, et pour plan vertical un plan XY perpendiculaire à la droite BC, qui joint deux des points donnés B et C. Des points A, B, C comme centres, avec des rayons égaux aux distances connues

D, D', D'', on décrit trois cercles qui se coupent deux à deux suivant les trois cordes EF, GH, IK, lesquelles se coupent au même point M. Ces cordes sont aussi les traces horizontales des plans verticaux qui contiennent les cercles d'intersection des sphères; d'où il suit que ces plans se coupent suivant la droite verticale (M, mm'); or cette droite coupe en deux points le cercle du diamètre IK, intersection des sphères qui ont pour centres les points B et C; donc les points (M, m), (M, m') seront aux distances données des trois points A, B, C.

Pour construire les projections verticales m, m' des deux points qui satisfont aux conditions du problème, on décrit du point c de la droite XY, qui est sur le prolongement de la droite BC, la circonférence du diamètre ik=IK; cette circonférence est rencontrée par la perpendiculaire Mm à XY, aux points m et m'.

PROBLÈME II.

Déterminer le centre et le rayon d'une sphère qui passe par quatre points donnés ? (Pl. 23, fig. 2.)

4. *Solution.* On joint les quatre points donnés deux à deux par six droites, et on conçoit six plans perpendiculaires à ces droites, élevés par leurs milieux. Chacun de ces plans aura tous ses points à égale distance des deux points de la droite à laquelle il est perpendiculaire; il sera donc un lieu géométrique du centre de la sphère demandée, puisque ce centre doit être à égale distance des quatre points donnés. Trois des six plans qui déterminent par leurs intersections le centre de la sphère, sont perpendiculaires à trois des six droites qui joignent les quatre points donnés; mais il faut remarquer que ces trois droites ne peuvent pas être prises arbitrairement. Lorsqu'elles sont dans le même plan, ou autrement, lorsqu'elles comprennent une face de la pyramide triangulaire formée par les six droites, les trois plans perpendiculaires aux trois côtés d'une face passent par la même droite; cette droite contient le point, mais sa position sur cette droite reste indéterminée. Elle sera au contraire déterminée, si les trois droites appartiennent à deux ou trois faces de la pyramide; alors le plan perpendiculaire à l'une des droites, coupera nécessairement la ligne d'intersection des plans perpendiculaires aux deux autres droites, et le point d'intersection sera le centre de la sphère demandée. La droite qui joint ce centre et un quelconque des quatre points donnés, est évidemment le rayon de la sphère.

Explication de la fig. 2, pl. 23.

5. On prend pour plan horizontal de projection trois des quatre points donnés, et pour plan vertical de projection, un plan parallèle à l'une des droites menées du quatrième point donné aux trois autres. Soient A, B, C trois points donnés sur le plan horizontal; le quatrième point (D, d) est projeté en d sur un plan vertical XY, parallèle à la droite BD. En joignant les trois points A, B, C par trois droites, et prenant leurs milieux E, F, G, les trois plans perpendiculaires à ces droites menés par les points E, F, G, se coupent suivant une verticale M, qui est un lieu géométrique du centre de la sphère demandée.

Le plan mené par le milieu (K, k) de la droite (BD, bd), perpendiculairement à cette droite, étant perpendiculaire au plan vertical de projection, la trace verticale hh' du premier plan sur le second, est perpendiculaire à la droite bd . De plus, cette trace passe par le milieu k de la droite bd ; sa position est donc déterminée. La projection verticale du centre de la sphère se trouve sur la droite hh' , puisque ce centre est dans un plan perpendiculaire au plan vertical, qui a pour trace cette droite hh' ; mais le centre de la sphère est aussi sur la verticale M, dont la projection verticale est mm' ; donc le point m intersection des deux droites hh' , mm' est la projection verticale du centre de la sphère. Le rayon de cette sphère sera égal à la droite (MB, mb) qui joint le centre (M, m) et un point (B, b) donné. Portant MB en $m'b'$ sur XY, l'hypothénuse mb' du triangle rectangle $mm'b'$ sera la longueur du rayon de la sphère. Des points M et m comme centres, avec le rayon $MB = mb$, on décrit deux cercles, qui sont les projections des deux grands cercles de la sphère, l'un horizontal et l'autre vertical, et sont aussi les limites des projections de cette sphère.

PROBLÈME III.

Trouver le centre et le rayon d'une sphère inscrite à une pyramide triangulaire?
(Pl. 23, fig. 3.)

6. *Solution.* La sphère inscrite à une pyramide triangulaire est tangente aux quatre plans qui comprennent cette pyramide: or le centre d'une sphère tangente à deux plans, a pour lieu géométrique un troisième plan qui divise en deux parties égales l'angle formé par les deux premiers; car ce troisième plan contient tous les points à égales distances des deux autres; donc si l'on

divise en deux parties égales chacun des six angles dièdres intérieurs de la pyramide triangulaire, on aura six plans dont trois détermineront le centre de la sphère, pourvu que ces trois plans ne passent pas par l'un des quatre sommets de la pyramide triangulaire donnée.

Considérant une face quelconque de la pyramide, et les trois angles dièdres adjacens au plan de cette face, les trois plans qui divisent ces angles en deux parties égales forment une seconde pyramide dont le sommet est le centre de la sphère inscrite à la première pyramide. Si les plans des trois angles dièdres divisés en parties égales, passaient par un même point, sommet commun de ces angles, dans ce cas les plans de division passeraient par une même droite, ne formeraient pas une nouvelle pyramide, et la position du centre de la sphère sur la droite intersection des trois plans, resterait indéterminée.

Explication de la fig. 3, pl. 23.

7. On prend pour plan horizontal de projection celui du triangle ABC, base de la pyramide donnée, et pour l'intersection des deux plans de projection, une droite quelconque XY. Soit (D, d) le sommet de la pyramide; les trois faces adjacentes à la base ABC font avec le plan de cette base des angles qui se mesurent dans les plans verticaux DE, DF, DG respectivement perpendiculaires aux côtés AB, BC, AC du triangle ABC. Portant ces droites DE, DF, DG en D'e, D'f, D'g', et menant les droites de D, df', dg', les trois angles dièdres adjacens à la base ABC, seront égaux aux angles de D, df'D, dg'D; divisant chacun de ceux-ci en parties égales par les droites e'e', f'f', g'g', on aura les trois angles dièdres d'une nouvelle pyramide qui a même base ABC que la pyramide donnée, et dont le sommet (u, u') est le centre de la sphère demandée. Pour construire ce sommet, on coupe les trois plans qui comprennent la seconde pyramide par un plan horizontal quelconque, dont la trace sur le plan vertical de projection est la droite xy. Cette droite coupe les lignes e'e', f'f', g'g' en trois points e'', f'', g'', dont les distances à la droite D'd sont connues. Portant ces distances e'd', f'd', g'd' sur les droites DE, DF, DG de D en e, f, g, et menant par ces derniers points des droites eB, fC, gA respectivement parallèles aux côtés AB, BC, CA, du triangle base des deux pyramides, ces droites se couperont en trois points A', B', C', qui déterminent le triangle A'B'C', projection horizontale d'une section horizontale de la seconde pyramide. Joignant les sommets des angles égaux des deux triangles semblables ABC, A'B'C' par les droites AA', BB', CC', ces droites seront les projections horizontales des trois arêtes de la seconde pyramide, qui se cou-

peut au point ω projection horizontale du centre de la sphère inscrite à la première pyramide. L'une des trois arêtes de la seconde étant projetée sur le plan vertical, en cc' par exemple, l'intersection de cette droite cc' et de la perpendiculaire $\omega\omega'$ à XY , détermine la projection verticale ω' du centre de la sphère. Quant au point c' , on l'obtient en menant la perpendiculaire $C'c'$ à XY , qui coupe l'horizontale xy en c' .

Connaissant le centre (ω, ω') de la sphère, le rayon de cette sphère sera égal à la perpendiculaire abaissée du centre sur l'une des quatre faces de la pyramide donnée, par exemple, sur la base horizontale ABC . Cette perpendiculaire est une verticale égale à $\omega'o$ rayon de la sphère. Les cercles décrits des points ω, ω' comme centres avec ce rayon $\omega'o$, sont les limites des projections horizontale et verticale de la sphère inscrite à la pyramide donnée. Des quatre points de contact de la sphère et des faces de la pyramide, on connaît celui (ω, o) qui est sur le plan horizontal de projection; pour obtenir les trois autres, on remarquera qu'ils sont les pieds des perpendiculaires abaissées du centre (ω, ω') sur les trois faces de la pyramide dont les plans ont pour traces horizontales les droites AB, BC, CD . Abaisant du point ω les perpendiculaires $\omega H, \omega I, \omega J$ sur les côtés AC, AB, BC , ces droites contiendront les projections horizontales K, M, N des trois points de contact. Pour construire les projections verticales k, m, n (k par exemple), on conçoit le plan vertical ωH ramené en $\omega H'$ parallèle à la trace XY des deux plans de projection. Ce plan vertical coupe la face de la pyramide adjacente au côté AC de la base, suivant une droite $h'k'$ parallèle à $g'd$. Abaisant du point ω' la perpendiculaire $\omega'k'$ sur dh' , et portant la distance $k'l'$ du point k' à la verticale $\omega\omega'$, de ω en K , le point K , projection horizontale de l'un des points de contact, sera déterminé. La perpendiculaire Kk à XY et l'horizontale $k'l'$ se coupent au point k projection verticale du même point de contact. On construira de la même manière les deux autres points de contact $(M, m), (N, n)$.

Les perpendiculaires abaissées du centre de la sphère sur les faces de la pyramide donnée, sont égales comme rayons de la même sphère; ainsi la droite $\omega'k' = \omega'o$, et la droite $h'k'$ qu'on a menée parallèlement à $g'd$ est tangente au cercle décrit du point ω' comme centre, avec le rayon $\omega'o$.

PROBLÈME IV. — DE LA PYRAMIDE TRIANGULAIRE. (Pl. 24.)

En ne considérant dans une pyramide triangulaire que six angles, savoir, les angles des trois arêtes qui ont pour sommet commun le sommet de la pyramide, et les angles dièdres formés par les trois plans des arêtes, on propose, trois des six angles étant donnés, de trouver les trois autres ?

8. *Solution.* On distingue les angles formés par les arêtes, des angles dièdres, en nommant les premiers, *faces* de la pyramide, et les seconds, *angles* de la pyramide. Les combinaisons trois à trois des six angles d'une pyramide, abstraction faite de la base, sont au nombre de six, savoir :

- 1° Trois faces;
- 2° Deux faces et un angle compris entre ces deux faces;
- 3° Deux faces et un angle opposé à l'une de ces faces;
- 4° Une face et deux angles adjacens à cette face;
- 5° Une face et deux angles, dont un seulement est adjacent à la face;
- 6° Trois angles.

En supposant qu'on ait donné les trois angles désignés dans l'une quelconque des six combinaisons précédentes, il s'agit de trouver les trois autres angles nécessaires pour compléter la pyramide; ce qui présente six questions qu'on peut résoudre chacune séparément, mais qu'on peut réduire à trois par la considération de la pyramide supplémentaire. Nous allons d'abord expliquer comment on forme cette pyramide; ensuite nous donnerons pour chaque question une solution directe et indépendante de la pyramide dite supplémentaire.

9. Considérant dans une pyramide les trois arêtes qui se réunissent à son sommet, on forme une seconde pyramide, en menant trois plans respectivement perpendiculaires aux trois arêtes de la première. Les angles et les faces de cette nouvelle pyramide ont pour supplémens les faces et les angles de la pyramide dont elle est dérivée, et par cette raison, on la nomme *supplémentaire*. Les plans des faces de la seconde pyramide étant perpendiculaires aux arêtes de la première, les plans des faces de la première sont nécessairement perpendiculaires aux arêtes de la seconde; d'où il suit que les deux pyramides sont réciproquement supplémentaires l'une de l'autre. Avant de démontrer qu'un angle ou une face de chacune d'elles a pour supplément une face ou un angle de l'autre, nous ferons remarquer qu'en faisant varier les points de l'espace par lesquels on mène les plans qui comprennent la pyramide supplémentaire, on fait varier la position du sommet de cette pyramide, mais que les valeurs de ses angles ne changent pas.

10. Soient (*pl. 24, fig. 1*) SA, SB deux des trois arêtes d'une pyramide, A et B deux points pris à volonté, l'un sur l'arête SA, et l'autre sur l'arête SB. Les plans menés par les points A et B perpendiculairement aux arêtes SA, SB, ont évidemment pour traces sur le plan des deux arêtes SA, SB, les deux droites AX, BX perpendiculaires l'une à la droite SA, et l'autre à la droite SB; or dans le quadrilatère ASBX, les angles A et B sont droits; donc l'angle X est supplément de l'angle S; mais l'angle S est une face de la première pyramide; l'angle X est un angle dièdre de la pyramide supplémentaire; donc ces deux angles S et X sont supplémens l'un de l'autre. Par la même raison, le plan d'une face quelconque de la pyramide supplémentaire est perpendiculaire aux plans de deux faces de la pyramide primitive, et l'angle de ces deux plans est supplément de la face de la pyramide supplémentaire.

11. En admettant que de deux pyramides, dont la première est formée par les plans perpendiculaires aux arêtes de la seconde, l'une quelconque soit supplémentaire de l'autre, il est facile de voir que les six questions (art. 8^e) se réduisent à trois. En effet, lorsqu'on donne les trois angles A, B, C d'une pyramide, les supplémens de ces angles sont les trois faces de la pyramide supplémentaire; or, connaissant les trois faces, on pourra, en supposant la première des six questions (art. 8) résolue, déterminer les trois angles dièdres, opposés aux faces connues; mais ces angles dièdres sont les supplémens des faces de la pyramide dont on a donné les angles A, B, C; donc les six angles de cette dernière pyramide seront déterminés. Ainsi l'on voit que la première et la sixième questions se réduisent à une seule; on démontrera de la même manière que la deuxième et la quatrième, la troisième et la cinquième, se réduisent à deux autres questions; donc la solution complète de la pyramide triangulaire ne comprend que les trois problèmes suivans :

1^o Étant données les trois faces d'une pyramide triangulaire, déterminer les trois angles;

2^o Étant données deux faces et un angle formé par les plans de ces faces, déterminer les deux autres angles;

3^o Étant données deux faces et un angle opposé à l'une de ces faces, déterminer les deux autres angles.

* Le renvoi sans désignation du livre, se rapporte à celui de l'article qui contient ce renvoi.

Question 1^{re}. — Étant données les trois faces d'une pyramide, déterminer les trois angles dièdres.

12. *Solution.* Les trois faces données étant développées sur un même plan, soient (*pl. 24, fig. 2*) SA ou SF, SB, SE les arêtes d'une pyramide dont il faut déterminer les angles. On suppose les deux arêtes SB, SE fixes dans le plan de la face BSE, et on fait tourner les droites SA et SF, l'une autour de la droite SB, et l'autre autour de la droite SE; par ce mouvement on engendre deux surfaces coniques droites qui ont même sommet; la droite intersection de ces deux cônes est la troisième arête de la pyramide. Pour déterminer cette droite, on imagine une sphère d'un rayon quelconque SA ou SF, dont le centre est au point S, sommet commun des deux cônes droits; cette sphère coupe le premier cône suivant un cercle du rayon AB, dont le centre est en B, et le second cône suivant un cercle du rayon EF dont le centre est en E. Les plans de ces cercles étant perpendiculaires, l'un à la droite SB et l'autre à la droite SE, ils se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan de la face BSE; or cette droite contient les points d'intersection des deux cercles; donc si du point B comme centre, avec le rayon AB, on décrit le cercle AC qui coupe la droite CD perpendiculaire à ABD au point C, ce point appartient à la troisième arête; d'où il suit que dans le triangle CBD rectangle en D, l'angle CBD est égal à l'angle compris entre les faces BSE et BSA. Décrivant du point E comme centre, avec le rayon EF, le cercle FC, et élevant la perpendiculaire DC' à ED, l'angle C'ED est égal à l'angle des faces BSE et ESF.

13. Au lieu de développer la pyramide sur le plan de la face BSE; on aurait pu prendre pour plan de développement celui de la face ASB, ou celui de la face ESF; et on aurait construit par la méthode exposée dans l'article précédent, l'angle des deux faces ASB et FSE; mais il sera plus simple de concevoir un plan perpendiculaire à l'arête SA ou SF (*fig. 2*), en un point A ou F. Ce plan coupera les faces ASB et ESF, l'une suivant AG, perpendiculaire à SA, et l'autre suivant FH, perpendiculaire à SF. Le plan mené par les deux droites AG, FH coupe la pyramide suivant le triangle GHK, dans lequel les côtés GK, HK sont égaux aux droites GA, HF, et dont l'angle K opposé au côté GH est égal à l'angle formé par les deux faces ASB, ESF.

Les droites AB, BI, IF sont les trois côtés d'un autre triangle CBI, dans lequel l'angle B opposé au côté CI, est égal à l'angle déjà trouvé (art. 12) des deux faces ASB, BSE.

Les faces données de la pyramide, au lieu d'être des angles aigus, pourraient

être des angles obtus; alors la *fig. 2* deviendrait la *fig. 2 (bis)* dans laquelle les mêmes points sont marqués des mêmes lettres.

14. Si d'un point de l'espace on dirige deux rayons visuels vers deux objets déterminés, ces deux rayons et la verticale passant par le même point, forment une pyramide triangulaire; l'angle compris entre les deux faces dont les plans se coupent suivant la verticale, est ce qu'on nomme l'angle *réduit à l'horizon*. Connaissant les angles de la verticale avec les rayons visuels, et l'angle des deux rayons visuels entre eux, il est évident que la recherche de l'angle réduit à l'horizon, dépend de la solution d'une pyramide triangulaire dont on connaît les trois faces.

15. On trouve encore l'angle *réduit à l'horizon* de la manière suivante (*fig. a*, *pl. 24*).

Soient ASB l'angle de la verticale SA et d'un rayon visuel SB, AB l'intersection du plan de cet angle et d'un plan horizontal; on trace sur ce second plan les deux autres angles connus, savoir 1° l'angle ASC de la verticale SA et du second rayon visuel SC; 2° l'angle BSc des deux rayons visuels. Le plan de ces deux rayons coupe le plan horizontal suivant une droite, dont la partie comprise entre les deux rayons visuels, est le côté Bc du triangle BSc, dans lequel on a $Sc = SC$.

Considérant le premier rayon visuel SB comme fixe, on fait mouvoir le second rayon SC autour de la verticale SA, jusqu'à ce que les deux rayons fassent entre eux l'angle donné BSc. Le point C, dans ce mouvement, décrit la circonférence CC' dont le centre est en A, et qui a pour rayon la droite AC; il doit s'arrêter lorsque sa distance C'B au point B est égale à Bc; donc si l'on décrit du point B comme centre, avec Bc pour rayon, un cercle qui coupe la circonférence CC' au point C', l'angle CAC' sera la projection horizontale de l'angle observé BSc, et par conséquent cet angle *réduit à l'horizon*.

Question 2. — Connaissant dans une pyramide triangulaire deux faces et l'angle formé par les plans de ces faces, déterminer les deux autres angles et la troisième face de la pyramide.

16. *Solution.* La question proposée se réduit à trouver la troisième face de la pyramide; car alors on connaîtra les trois faces de cette pyramide, et par la solution du problème précédent, on construira les deux angles inconnus. Pour déterminer la face inconnue, soient (*pl. 24, fig. 3*) ASB, BSE les deux faces données, développées sur le plan de la seconde BSE. Soit CBD l'angle de ces deux faces, donné dans un plan ABCD perpendiculaire à la droite SB, on porte la droite AB sur BC. Le plan SBC contenant la face donnée ASB, le

point A de l'arête SA est élevé au-dessus du plan horizontal d'une hauteur égale à la droite CD perpendiculaire à la droite ABD; donc si par la droite CD on mène un plan CDE perpendiculaire à l'arête SEI, ce plan contiendra le triangle C'ED, dans lequel l'angle E opposé au côté $C'D=CD$, sera l'angle du plan de la troisième face cherchée et du plan de la face BSI; prolongeant la droite DE d'une quantité $EF=EC'$, et menant la droite SF, l'angle ESF sera évidemment la troisième face cherchée.

Construisant la pyramide avec les trois faces ASB, BSE et ESF, les points A, C, F se réuniront en un seul; d'où il suit que les droites SA et SF sont les rayons d'un même cercle décrit du point S comme centre.

Le plan ABCD coupe la pyramide suivant un triangle CBI, dans lequel le côté $CB=AB$, et le côté $CI=IF$; donc les deux droites IF, EF et les deux arcs de cercle AF, CF, décrits des points S et E comme centres, concourent au même point F de l'arête SF; d'où il suit que deux quelconques de ces lignes déterminent par leur intersection le côté SF de la face cherchée ISF.

Si au lieu de l'angle CBD compris entre les deux faces ASB, BSE, on eût pris le supplément ABC, on aurait trouvé par la même construction la troisième face ISF de la pyramide.

Question 3^e. — Connaissant dans une pyramide deux faces et un angle opposé à l'une de ces faces, déterminer la troisième face?

17. *Solution.* Soient (pl. 24, fig. 4) BSE et ESF les deux faces données, développées sur le plan de la première BSE; soit EbH' l'angle formé par le plan qui contient la face BSE et par le plan de la face qu'il s'agit de trouver; les droites SbB et bH' déterminent la position du plan qui contient la face cherchée. L'arête SF, en tournant autour de l'arête SE comme charnière, engendre un cône droit dont la base circulaire $ff'F$ est dans un plan FEDG perpendiculaire à la charnière SE: or ce plan coupe le plan $SbBH'$ de la face cherchée, suivant la droite GH; donc lorsque l'arête SF est dans le plan de la face cherchée, le point F de cette arête est en f ou f' , intersection de la circonférence $ff'F$ dont le centre est en E, et de la droite GH. Supposons-le en f' ; en faisant tourner le plan $SbBH'$ sur SbG comme charnière, pour l'abattre sur le plan de la face connue BSE, les distances du point f aux points G et S de la charnière ne varient pas; donc le point A intersection des arcs de cercle f_3A , FaA décrits des points G et S comme centres avec des rayons égaux à Gf et SF , est ce que devient le point f , lorsqu'il est abattu sur le plan de la face BSE; donc ASB est la troisième face de la pyramide, correspondant au point f .

On trouverait de la même manière l'angle A'SB pour la troisième face de

la pyramide, qui correspond au point f' . Connaissant les trois faces de la pyramide, les trois angles dièdres seront déterminés (art. 12).

18. On a déjà démontré (art. 11) que les trois dernières questions (art. 8) sur les angles de la pyramide triangulaire se ramenaient aux trois premières; ce qu'on peut encore faire voir avec plus de développement, de la manière suivante. Désignons par A, B, C les angles dièdres de la pyramide, et par a, b, c les faces opposées à ces angles. On vient de résoudre les trois questions suivantes:

1° Connaissant les faces a, b, c , trouver les trois angles A, B, C ?

2° Connaissant deux faces a, b et l'angle compris C , trouver les trois angles a, A, B ?

3° Connaissant deux faces a, b , l'angle non compris A ou B , trouver les trois angles c, C, B ou A .

Supposons maintenant qu'on donne les trois angles A, B, C d'une pyramide, et qu'il faille trouver les trois faces a, b, c , on connaîtra dans la pyramide supplémentaire les trois faces a', b', c' respectivement égales à :

$$200^{\text{me}} - A, 200^{\text{me}} - B, 200^{\text{me}} - C.$$

On en déduit trois angles A', B', C' , respectivement opposés aux trois faces a', b', c' ; mais on a par la propriété de la pyramide supplémentaire :

$$A' = 200^{\text{me}} - a; B' = 200^{\text{me}} - b; C' = 200^{\text{me}} - c;$$

d'où il suit que les faces cherchées a, b, c sont les supplémens des angles connus A', B', C' ; ce qui donne la solution de la sixième question (art. 8).

19. Passons à la cinquième question. On donne deux angles A, B et une face c adjacente à ces angles; il s'agit de trouver l'angle inconnu C et les deux faces b et a ; la pyramide supplémentaire sera formée de deux faces $(200^{\text{me}} - A)$, $(200^{\text{me}} - B)$, et d'un angle $(200^{\text{me}} - c)$ compris entre les plans de ces deux faces.

Nous venons de désigner (art. 18) ces trois angles connus, respectivement par les lettres a', b', C' . Construisant la pyramide supplémentaire, on aura la face c' et les deux angles B', A' . Mais $c' = 200^{\text{me}} - C$; $B' = 200^{\text{me}} - b$; $A' = 200^{\text{me}} - a$; d'où il suit que les angles cherchés C, b et a sont les supplémens d'angles connus c', B', A' .

La dernière question consiste à trouver deux faces a, b et l'angle non compris A , en connaissant la face c , et les deux angles C, B . La pyramide supplémentaire aura pour faces c', b' , les deux supplémens $(200^{\text{me}} - C)$, $(200^{\text{me}} - B)$, et pour angle C' opposé à la première de ces deux faces, $(200^{\text{me}} - c)$. Co-

struisant cette pyramide, on connaîtra la face a' , et les deux angles A' , B' , qui auront pour valeurs :

$$.(200^\circ - A), (200^\circ - a), (200^\circ - b),$$

c'est-à-dire les supplémens des trois angles demandés A , a , b .

Nous allons maintenant donner une solution des trois dernières questions, qui sera indépendante de la considération de la pyramide supplémentaire.

Question 4^e. — Les trois angles dièdres d'une pyramide étant donnés, on demande les trois faces? (Pl. 24, fig. 5, fig. 5, fig. 5 bis.)

20. *Solution.* Soient A , B , C les trois angles donnés; ayant mené deux plans inclinés l'un par rapport à l'autre sous un angle égal à l'un des angles donnés, à A par exemple, la question consiste à déterminer un plan qui passe par un point quelconqué pris dans l'espace, et qui fasse avec les deux premiers des angles égaux à B et à C ; ce troisième plan coupera la droite intersection des deux premiers plans en un point qui sera le sommet de la pyramide formée par les trois plans.

La condition de mener un plan qui fasse avec un autre plan donné un angle déterminé, équivant à la condition de mener un plan tangent à un cône droit; dont l'axe est perpendiculaire au plan donné, et dont le côté fait avec ce même plan l'angle déterminé: or l'un des plans qui comprend une face de la pyramide cherchée, doit faire avec deux plans donnés de position, des angles connus; donc il doit toucher deux cônes droits qui ont même sommet. Pour construire le plan qui touche ces deux cônes (nommons-les C et C'), en n'employant que la ligne droite et le cercle, on observera que ce plan touche en même temps toutes les sphères inscrites aux cônes C et C' , et tous les cônes circonscrits aux sphères prises deux à deux, dont l'une est inscrite au cône C et l'autre au cône C' .

21. Soient (pl. 24, fig. 5) A' , B' , C' les trois angles donnés, et cbE (fig. 5) un angle égal à l'un des angles donnés, à A par exemple. Ayant mené par un point D pris à volonté dans le plan de l'angle cbE , deux droites DE , Df perpendiculaires, l'une à bE et l'autre à bc , on regarde ces droites comme les axes de deux cônes droits, dont les côtés DG , Dc font avec les plans bEG et bfc de leurs bases circulaires, des angles DGE , Dcf , l'un égal à B et l'autre égal à C , et il s'agit de mener par le point D un plan qui touche à la fois ces deux cônes.

Soit II le point de rencontre de l'axe DEH et de la droite GH perpendi-

culaire à DG; une sphère dont le centre est en H, et qui a pour rayon GH, est inscrite au premier cône, et le touche suivant le cercle du rayon EG; une seconde sphère d'un rayon CM égal à celui de la première sphère, est inscrite au second cône, et le touche suivant le cercle du rayon CL. Pour construire le centre M de la seconde sphère, on élève une perpendiculaire DK = HG au côté Dc du second cône; la parallèle KC à l'axe DL de ce cône, coupe le côté Dc au point C, et la droite CM, égale et parallèle à DK, détermine la position du centre M. Ayant mené la droite CB parallèle à cb, et BS perpendiculaire à BE, on peut prendre la droite BS pour l'intersection des deux plans qui font entre eux l'angle donné A, et considérer cette droite comme une arête de la pyramide cherchée.

Les deux sphères de rayons égaux, dont l'une est inscrite au premier cône et l'autre au second cône, sont touchées par un cylindre droit dont l'axe est parallèle à la droite HM, suivant des grands cercles de ces sphères, dont les plans HO, MP sont perpendiculaires à la droite HM, qui joint les centres H et M des sphères; donc le plan tangent à ce cylindre mené par le point D touchera les deux cônes, et l'arête de contact sur chaque cône passera par le point d'intersection du cercle base de ce cône, et du cercle commun au cylindre et à la sphère qui est inscrite à ce même cône. Mais le plan de ce dernier cercle coupe le plan de la base du cône suivant la droite OF perpendiculaire à EOG; donc le plan tangent aux deux cônes touche le premier suivant une arête qui passe par le point F; donc la tangente FS au cercle décrit du point E comme centre avec le rayon EG, forme avec la droite BS, un angle BSF, qui est une face de la pyramide cherchée.

Ayant décrit du point B comme centre avec un rayon BL, l'arc LL', et du point L' comme centre avec un rayon L'C' = LC, le cercle C'A, la tangente SA à ce dernier cercle, et la droite SB, comprennent entre elles la face ASB de la pyramide cherchée.

Connaissant deux faces ASB, BSF et l'angle des plans de ces faces, la troisième face sera déterminée (art. 16).

Si par le point O on mène la droite OP parallèle à HLM, qui coupe la droite BC au point P, ce point sera la projection du point de contact A, sur le plan C'BE perpendiculaire à l'arête SB. Donc après avoir décrit du point B comme centre, avec un rayon BP, l'arc Pp qui coupe la droite BC' au point p, la perpendiculaire pA à BC' contient encore le point A de l'arête SA, tangente au cercle C'A.

22. La droite OF perpendiculaire à EG coupe le cercle décrit du point E comme centre avec un rayon égal à EG, en deux points F et F'. La tangente à ce cercle menée par le point F' transporterait le sommet S de la pyramide

en un point S' de la droite SBS' , tel que $BS = BS'$; la pyramide qui aurait pour arête cette droite $F'S'$, serait *symétrique* par rapport à la pyramide qui a pour arête la droite BS .

23. Les sphères inscrites aux deux cônes droits ne sont pas seulement touchées par un cylindre dont l'axe est parallèle à la droite qui joint leurs centres; on conçoit encore le cône qui a son sommet au milieu d de cette droite, et qui est circonscrit aux deux sphères; les deux plans tangens à ce cône, menés par le point D , forment avec les deux plans inclinés l'un par rapport à l'autre d'un angle CBE , deux pyramides qui sont symétriques; chacune de ces pyramides ne diffère de celle qu'on a déterminée en faisant usage du cylindre circonscrit, que par un seul angle. Le plan tangent au cylindre donne une pyramide dont les angles A, B, C sont aigus; le plan tangent au cône dont le sommet est en d , détermine une pyramide dans laquelle deux de ces angles sont égaux aux angles A et B , et le troisième angle est supplément de l'angle C . La *fig. 5 (bis)* est relative à cette dernière pyramide; l'explication de la *fig. 5* s'y applique, parce que les points analogues y sont marqués des mêmes lettres. Ces deux figures ne diffèrent que par les droites perpendiculaires à la ligne des centres M et II , sur lesquelles se trouvent les points P et O . Dans la *fig. 5*, ces droites sont MP, HO , et dans la *fig. 5 (bis)* RP, T' et ROT .

Trois plans dont les inclinaisons respectives ont pour mesures les angles A, B, C divisent l'espace en huit angles trièdres symétriques deux à deux; nommant A', B', C' les supplémens des angles A, B, C , quatre des huit angles trièdres ont pour angles dièdres $1^\circ A, B, C$; $2^\circ A, B', C'$; $3^\circ A', B, C'$; $4^\circ A', B', C$.

En excluant les supplémens des angles dièdres donnés A, B, C , les deux pyramides symétriques construites (art. 21 et 22), sont les seules dont les faces comprennent entre elles les angles donnés.

Question 5'. — Étant donnés dans une pyramide deux angles et la face à laquelle ces angles sont adjacens, construire les deux autres faces?

24. *Solution.* Soient (*pl. 24, fig. 6*) BSE la face donnée, Cbd et $C'd'd''$ les deux angles connus, adjacens l'un à l'arête SB et l'autre à l'arête SE ; il s'agit de déterminer les deux autres faces.

Ayant mené la parallèle quelconque CD à SB , et la parallèle $C'd'$ à SE , ces deux droites, projections de deux autres droites qu'on suppose dans un plan parallèle au plan de la face BSE , à la distance Cd ou $C'd'$ de ce plan, se coupent en un point D , qui est la projection d'un point de la troisième arête de la pyramide sur le plan de la face BSE . Faisant mouvoir les deux plans $SBdC$ et $SEd'C'$, l'un autour de SB , l'autre autour de SE , le point de l'arête dont D

est la projection, viendra se placer dans le plan de la face BSE sur les droites DBA et DEF, perpendiculaires, la première à SB et la seconde à SE; de plus ce point est à une distance du sommet S de la pyramide, égale à l'hypothénuse du triangle rectangle qui a pour côtés adjacens à l'angle droit, DS et $d'C'$; donc dans le développement, ce point est sur le cercle décrit du point S comme centre, avec cette hypothénuse pour rayon, et par conséquent il est à la rencontre de ce cercle et des droites DA et DF; donc les angles ESF et ASB sont les deux faces cherchées.

On aurait encore pu construire les points A et F, en observant que $BA = bC$, et que $EF = d'C'$.

Question 6^e. — Etant donnés deux angles et la face opposée à l'un de ces angles, on demande les deux autres faces?

25. *Solution.* Soient (pl. 24, fig. 7) BSD la face donnée, CBD l'angle du plan de cette face avec le plan SBC qui contient la seconde face, BCD l'angle de ce dernier plan avec celui qui contient la troisième face; la question consiste à mener par la droite SD un plan qui fasse avec le plan CBS un angle égal à BCD'. Ayant pris le point D pour le sommet d'un cône droit, dont DL perpendiculaire à BC' est l'axe, et dont le côté DC fait avec BC un angle BCD égal à BCD', on abat le plan SBC' sur le plan de la face BSD, et la base du cône du rayon LC, contenue dans ce plan, vient se placer suivant le cercle C'AA', qui a pour rayon la droite C'L' = CL, et dont le centre est un point L' de la droite BD, tel que BL' = BL. Si du point S, on mène à ce cercle la tangente SA ou SA', l'angle ASB ou A'SB sera la face adjacente à BSD; car le plan qui passe par SD et SA ou par SD et SA', est évidemment tangent au cône dont LD est l'axe; donc il fait avec le plan CBS un angle égal à l'angle donné BCD'.

Ayant deux faces BSD et ASB ou A'SB, et l'angle CBD compris entre elles, on achèvera la solution comme il a été dit (art. 16).

26. Les six questions relatives à la pyramide triangulaire, que nous venons de résoudre, comprennent toute la trigonométrie sphérique. Le centre de la sphère sur laquelle on a tracé un triangle sphérique, peut être considéré comme le sommet d'une pyramide triangulaire, qui a pour arêtes les trois rayons de la sphère menés par les sommets du triangle sphérique. Les angles que ces rayons font entre eux, et qui ont pour mesures les côtés du triangle, sont les faces de la pyramide. Ce qu'on nomme l'angle du triangle, est un angle dièdre de la pyramide.

Soit O (fig. b, pl. 24) le centre d'une sphère; les trois rayons OA, OB, OC

déterminent le triangle sphérique ACB, qui a pour côtés les arcs de grands cercles AB, AC, CB, compris entre les rayons. En menant par le centre O de la sphère trois autres rayons OA', OB', OC', respectivement perpendiculaires aux plans des côtés CB, AC, AB du premier triangle sphérique, on forme un second triangle A'B'C' supplémentaire du premier. En effet, désignons comme précédemment par A, B, C, les angles dièdres du triangle sphérique, mesurés dans des plans perpendiculaires aux rayons OA, OB, OC, et par a, b, c les côtés CB, AC, AB, respectivement opposés aux angles A, B, C; les angles dièdres A', B', C' du triangle A'B'C' sont les supplémens des côtés a, b, c du triangle ABC, et en nommant a', b', c' les côtés du triangle A'B'C', opposés aux angles A', B', C', ces côtés sont respectivement les supplémens des angles A, B, C. Ainsi le côté a' opposé à l'angle A' étant compris entre les deux rayons OB', OC' perpendiculaires aux plans des côtés b, c du triangle primitif ABC, le plan de ce côté a' est perpendiculaire au rayon OA intersection des plans des côtés b et c ; on a donc dans ce plan, comme dans celui de la fig. 1^{re}, un quadrilatère ASBX à deux angles droits A et B, et à deux angles S, X, l'un égal au côté a' du triangle sphérique A'B'C', et l'autre égal à l'angle dièdre A du triangle sphérique ABC; d'où il suit que les angles a' et A sont supplémens l'un et l'autre.

PROBLÈME V.

Mener par une droite donnée un plan tangent à la surface d'une sphère?

(Pl. 25.)

27. *Solution.* Le plan tangent à la surface d'une sphère, mené par une droite donnée, est aussi tangent à toutes les surfaces coniques qui ont leurs sommets sur la droite, et sont circonscrites à la sphère; or la ligne de contact de chaque surface conique et de la sphère, est un petit cercle de cette sphère, qui est un lieu géométrique du point de contact de la sphère et du plan tangent demandé; donc ce point sera déterminé par l'intersection des cercles de contact de la sphère et de deux surfaces coniques quelconques, qui lui sont circonscrites; ce point et la droite donnée fixent la position du plan tangent à la sphère, mené par cette droite.

Le point de contact étant l'intersection de deux petits cercles de la sphère, il suit que par une droite donnée, on peut mener deux plans tangens à une sphère, puisque les deux cercles lieux géométriques des deux points de contact, se coupent nécessairement en deux points.

Pour que la solution graphique soit la plus simple possible, il faudrait

prendre pour l'un des plans de projection, pour l'horizontal par exemple, celui qu'on mènerait par le centre de la sphère et par la droite donnée; l'autre plan de projection passerait aussi par le centre de la sphère, mais serait perpendiculaire à la droite donnée. Les deux figures (*pl. 25*) que nous allons expliquer ne sont pas construites sur des plans de projection ainsi déterminés. On a eu principalement pour objet d'exercer aux constructions de la géométrie descriptive, et de présenter un système d'opérations graphiques qui se vérifient mutuellement. Les deux plans de projection des figures (*pl. 25*) passent par le centre de la sphère; mais la droite donnée est située d'une manière quelconque par rapport à ces plans.

Explication des fig. 1 et 2, pl. 25.

28. Soit XY (*fig. 1*) l'intersection des deux plans de projection, qui passent par le centre O de la sphère dont le rayon est OO' . La droite par laquelle il s'agit de mener un plan tangent à la sphère, est donnée par ses deux projections horizontale et verticale AB, ab .

On prend pour sommet des deux surfaces coniques circonscrites à la sphère, les points A et b , où la droite donnée coupe les plans de projection; le cône du sommet A touche la sphère suivant un petit cercle du diamètre CD , situé dans un plan vertical qui a pour trace sur le plan horizontal la droite CD ; le cône du sommet b touche la sphère suivant un petit cercle du diamètre ef , qui est situé dans un plan perpendiculaire au plan vertical, et a pour trace sur le plan vertical, la droite ef . Ces deux petits cercles des diamètres CD, ef sont les lieux géométriques des points de contact de la sphère et du plan demandé, et par conséquent les droites CD, ef sont les projections horizontale et verticale de la droite qui joint les points de contact, puisque cette droite est dans les plans des cercles qui se projettent, l'un sur le plan horizontal en CD , l'autre sur le plan vertical en ef . Mais la droite des points de contact, dont la position est déterminée par ses deux projections CD, ef , coupe la sphère en deux points; donc, si l'on construit ces deux points, le problème proposé sera ramené à celui-ci : *Trouver les traces d'un plan qui passe par un point et par une droite donnés?*

Sur CD comme diamètre, on décrit un cercle, et on construit sur le plan de ce cercle, la droite des points de contact; cette droite perce le plan horizontal au point K , et le plan vertical au point l situé au-dessous de la trace XY ; donc si l'on porte la distance lK en La sur une perpendiculaire La à CD , la droite menée par les points K et a sera la droite des points de contact, construite sur le plan du petit cercle du diamètre CD . En supposant que ce

plan ait tourné autour de sa trace horizontale CD, pour venir s'appliquer sur le plan horizontal, le point l où la droite des points de contact percé le plan vertical, a pris la position λ , qui détermine la droite K λ .

Cette droite K λ coupe le cercle du diamètre CD en deux points ϕ , ψ , l'un en dessous et l'autre au-dessus de l'horizontal CD; ces deux points sont ceux où les plans tangens à la sphère, menés par la droite donnée (AB, ab), touchent la sphère. Ils ont pour projections horizontales les points H, H' intersection de la droite CD et des perpendiculaires ϕH , $\psi H'$ abaissées des points ϕ , ψ sur cette droite. Mais les projections verticales des points de contact sont sur la droite $\epsilon\zeta$; elles se trouvent aussi sur les perpendiculaires H'h', H'h à XY; donc les points de contact sont déterminés de position par rapport aux plans de projection. Celui qui est au-dessus du plan horizontal a pour projections les points H', h'; et celui qui est au-dessous a pour projections les points H, h. Les rayons de la sphère menés par les points de contact ont pour projections l'un (OH, oh), l'autre (OH', oh'): or les plans tangens à la sphère sont perpendiculaires aux rayons menés par les points de contact; donc (art. 21, liv. I^{er}) les droites AR, bs , respectivement perpendiculaires aux projections (OH, oh), sont les traces du plan qui est tangent à la sphère au point (H, h), et qui passe par la droite donnée (AB, ab). Ces deux traces doivent se couper en un point T de la droite XY. De même les deux traces AR'T', $bs't'$ respectivement perpendiculaires aux projections OH', oh' du rayon mené par le second point de contact (H', h'), concourent vers un point de la droite XY: le problème proposé est complètement résolu.

29. Pour trouver l'intersection de la sphère et de la droite des points de contact, on pourrait mener par cette droite et par le centre de la sphère un plan; ce plan aurait pour trace horizontale la droite OK, et ferait avec le plan horizontal l'angle LMN, opposé au côté LN = L'l du triangle rectangle LMN. Le point (L, l) de la droite des points de contact, tournant autour de la trace OK comme charnière, s'appliquerait sur le plan horizontal en λ' , sur la perpendiculaire L' λ' à OK; le point K de la droite des points de contact est sur la charnière OK; par conséquent la droite $\lambda'K$ joint les deux points de contact. Cette droite coupe le grand cercle de la sphère décrit du point O comme centre, avec OO' pour rayon, aux points P et Q, qui sont les points de contact de la sphère et du plan tangent mené par la droite donnée. Les projections horizontales H, H' de ces points P et Q, sont sur les perpendiculaires PH, QH' à la charnière OK, et sur la droite KL, qui coupe ces perpendiculaires aux points H, H', déjà trouvés par la première construction. Les perpendiculaires Hh, H'h à XY, ont rencontré la droite $\epsilon\zeta$ aux points h , h' projections verticales des points de contact; on trouverait directement ces points

Explication de la fig. 2, pl. 25.

31. On mène par le centre O de la sphère, un plan (LOM) perpendiculaire à la droite donnée (AB, ab) , dont les traces OL, OM , sont respectivement perpendiculaires aux projections AB, ab de cette droite. Ce plan rencontre la droite donnée au point (N, n) , et coupe la sphère suivant le grand cercle du rayon OO' . Les tangentes au grand cercle, menées par le point (N, n) , touchent la sphère au point de contact de cette sphère et du plan cherché. Le plan (LOM) ayant tourné sur sa trace horizontale OL comme charnière, le point (N, n) de ce plan s'applique sur le plan horizontal en N' , par lequel on mène les tangentes $N'P, N'Q$ au grand cercle OTQ . La tangente $N'Q$ qui coupe le plan horizontal au point I de la droite OL , a pour projection horizontale NIH' ; d'ailleurs le point Q se projette sur le plan horizontal en un point de la droite QH' , perpendiculaire à OL ; donc le point de contact Q se projette sur le plan horizontal en H' . Mais la droite PQ coupe le plan horizontal au point K de la trace OL ; donc cette droite se projette sur le plan horizontal en $H'KH$. Abaisant du point P la perpendiculaire PH sur OL , le point H intersection de cette perpendiculaire et de la droite $H'KH$, est la projection horizontale du second point de contact P .

Pour construire les projections verticales des points de contact P et Q , on remarque que la tangente $N'Q$ a pour projection verticale la droite nih' . L'intersection de cette droite et de la perpendiculaire $H'h'$ à la commune intersection XY des plans de projection, détermine le point h' projection verticale du point Q ; d'ailleurs le point K de la droite PQ se projette verticalement en K' ; donc cette droite PQ se projette sur le plan vertical en $h'K'h$. Le point h , intersection de cette projection et de la perpendiculaire Hh à la commune intersection XY , est la projection verticale du point de contact P .

On peut encore remarquer que la droite PQ étant perpendiculaire au plan mené par le centre O de la sphère et par la droite donnée (AB, ab) , les projections $Hh', h'h$ de la droite qui joint les points de contact de la sphère et du plan, sont respectivement perpendiculaires aux traces OA, Ob du plan mené par le centre de la sphère et par la droite donnée.

Les points de contact $(H, h), (H', h')$, et la droite donnée (AB, ab) , déterminent les traces horizontales $ART, A'R'T'$ et les traces verticales $bTs, bs't'$ des deux plans tangens à la sphère, menés par les droites données. Ces traces sont, comme pour la première solution, perpendiculaires aux projections des rayons de la sphère menés par les points de contact, et se croisent comme

sur la fig. 1 en deux points (T et.....) de la commune intersection XY des plans de projection.

32. Les deux solutions du problème, *Mener un plan tangent à une sphère par une droite donnée*, sont fondées sur cette considération, que le plan tangent à la sphère est aussi tangent à toutes les surfaces coniques circonscrites à la sphère, dont les sommets sont situés sur la droite donnée. La même considération donne la solution du problème plus général : *Mener un plan tangent à une surface quelconque définie, par une droite donnée hors la surface*. Deux cônes circonscrits à la surface proposée, qui ont leurs sommets sur la droite donnée, touchent chacun la surface suivant une ligne, et les points d'intersection des deux lignes de contact, déterminent les plans tangents à la surface qu'on peut mener par la droite donnée. La construction géométrique des lignes de contact appartient à la théorie des ombres et de la perspective linéaires, que nous exposerons dans le second chapitre des applications. Ce chapitre contiendra la solution du problème général qui consiste à mener par une droite donnée, un plan tangent à une surface quelconque définie; maintenant nous ne traiterons cette question que dans l'hypothèse où la surface proposée est de révolution.

Nous allons faire connaître pour ce cas particulier une solution fort élégante qui ramène la question de géométrie à trois dimensions à ce problème de géométrie plane : « *Mener une droite qui soit à la fois tangente à une hyperbole et à une courbe qui est donnée dans le plan de cette hyperbole.* »

PROBLÈME VI.

Mener par une droite donnée un plan tangent à une surface de révolution?
(Pl. 26.)

33. *Solution de Monge.* La droite donnée, en tournant autour de l'axe de révolution de la surface proposée, engendre un hyperboloïde de révolution (art. 122, liv. 1^{er}), et le plan tangent à la surface proposée, mené par la droite donnée, est aussi tangent à cet hyperboloïde, puisqu'il passe (art. 127 et 144, liv. 1^{er}) par une droite de cette surface : or un plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact; donc le plan tangent à deux surfaces de révolution qui ont même axe, est perpendiculaire au plan méridien qui passe par l'un ou l'autre point de contact; d'où il suit que les deux points de contact sont dans le même méridien, et que la droite qui les unit résulte de l'intersection de ce méridien et du plan tangent. Mais cette droite est aussi la tangente commune des deux sections mé-

ridiennes de la surface, dont l'une est une hyperbole, et l'autre la courbe génératrice de la surface; donc en coupant les deux surfaces de révolution par un plan méridien quelconque, et menant la tangente commune aux deux sections, le point de contact sur l'hyperbole déterminera le cercle de cet hyperboloïde, qui est le lieu géométrique du point de contact du même hyperboloïde et du plan tangent demandé: la droite donnée est aussi le lieu géométrique de ce point de contact; donc la position de ce point sera connue; conduisant par ce point et par l'axe de révolution un plan méridien, le plan tangent demandé sera déterminé par la condition d'être perpendiculaire à ce plan méridien et de passer par la droite donnée.

Explication des figures, pl. 26.

34. On prend pour plan horizontal de projection un plan perpendiculaire à l'axe de révolution (A, aa') de la surface proposée; le plan vertical de projection a pour trace sur le plan horizontal, une droite quelconque XY . La courbe génératrice de la surface de révolution est une ellipse $aod'o'$, dont le grand axe aa' est la projection verticale de l'axe de révolution; cette courbe a pour projection horizontale la droite OAO' parallèle à XY .

La droite donnée (BC, bc), en tournant autour de l'axe (A, aa'), engendre un hyperboloïde de révolution, dont le cercle de gorge a pour rayon la perpendiculaire AD , abaissée du point A sur la projection horizontale BC de la droite donnée. Ce cercle, dont le plan coupe la droite donnée au point (D, d'), a pour projection verticale, l'horizontale xy menée par le point d , et pour projection horizontale, le cercle $DD'F$; le plan méridien OAO' , parallèle au plan vertical de projection, coupe la droite donnée au point (E, e), le cercle de gorge aux points (D', d'), (F, f); les deux points e, d' appartiennent à la branche d'hyperbole $ed'g'$, section de l'hyperboloïde de révolution par le plan méridien OAO' . Un point quelconque (G, g) de la droite donnée, décrit en tournant autour de l'axe (A, aa') un cercle du rayon AG , dont la projection verticale est gg' ; mais ce cercle a pour projection horizontale un cercle GG' du même rayon AG , qui est coupé par le plan méridien OAO' au point G' . Élevant la perpendiculaire $G'g'$ à XY , qui coupe l'horizontale gg' au point g' , ce point g' appartient à l'hyperbole $ed'g'$. On trouverait de la même manière d'autres points de la section méridienne de l'hyperboloïde.

Supposons maintenant qu'on ait mené les droites ih, lk tangentes à la fois aux sections méridiennes des deux surfaces de révolution, et qu'on ait déterminé les points de contact i, l sur la première section, les points h, k sur la se-

conde; les plans horizontaux hm , kn coupent la droite donnée aux points (M, m) , (N, n) , qui sont les points de contact de l'hyperboloïde de révolution et des plans demandés : or les plans méridiens qui passent par ces points, ont pour traces horizontales les droites AM , AN ; d'ailleurs ils sont verticaux; donc les plans demandés qui leur sont perpendiculaires, et passent par la droite donnée. (BC , bc), ont pour traces horizontales les droites BP , BQ , qu'on mène par le point B où cette droite donnée perce le plan horizontal, perpendiculairement aux droites AM , AN , traces des plans méridiens.

Les points de contact de la surface de révolution proposée et des plans tangens demandés, sont situés dans les plans méridiens AM , AN des points de contact sur l'hyperboloïde; ils sont aussi sur les cercles des diamètres ii' , ll' qui ont pour projections horizontales des cercles de même diamètre, décrits du point A comme centre; donc ces derniers cercles sont coupés par les droites AM , AN aux points I , L , projections horizontales des points de contact de la surface de révolution proposée et des plans demandés. Ces points ont évidemment pour projections verticales les points μ , λ des horizontales ii' , ll' .

35. *Addition à la solution précédente.* Nous avons supposé que chacune des tangentes ih , kl était déterminée par leurs points de contact sur les sections méridiennes de la surface proposée et de l'hyperboloïde de révolution. Dans la pratique, du dessin; on mènerait ces tangentes en appliquant une règle tangentiellément aux deux courbes données. La première tangente ih ainsi tracée, rencontre l'axe de révolution des deux surfaces au point r ; regardant ce point comme le sommet d'un cône droit engendré par la droite ih qui tourne autour de l'axe (A , aa'), le plan tangent à ce cône mené par la droite donnée, est le plan demandé : or ce cône a pour base sur le plan horizontal le cercle PP' , décrit du point A comme centre, avec un rayon AP' égal à la distance du centre A au point P' , dans lequel la tangente (nhp' , AP') coupe le plan horizontal; donc le plan tangent demandé a pour trace sur le plan horizontal, la droite BP tangente à la circonférence PP' (*). Le second plan tangent demandé a pour trace horizontale la droite BQ tangente à la circonférence QQ' , décrite du point A comme centre, avec le rayon AQ' égal à la distance du centre A au point Q' , dans lequel la tangente (klq' , AQ') coupe le plan horizontal. Les deux plans menés par la droite

(*) Par le point B où la droite donnée coupe le plan horizontal, on peut mener deux tangentes au cercle PP' ; mais la seconde tangente serait la trace d'un plan tangent à la surface proposée, qui passerait par la génératrice de l'hyperboloïde, dont la projection horizontale serait la tangente BD' à la circonférence $DD'D''$.

donnée, tangentiellement aux deux cônes droits, les touchent suivant des droites qui ont pour projections horizontales AP et AQ . Ces droites AP , AQ sont aussi les traces des plans méridiens verticaux, qui contiennent les points de contact de la surface donnée et des plans demandés. Connaissant ces plans méridiens, on construit les points (M, m) , (N, n) , où ils coupent la droite donnée (BC, bc) . Menant les horizontales mh , nk , elles rencontrent les tangentes ip' , kq' aux points h et k de la branche d'hyperbole $bd'g'$.

Les plans tangens à la surface proposée, dont on connaît les traces horizontales BP , BQ , touchent cette surface en deux points (I, i) , (L, l) , qu'on déterminerait en menant par les points P et Q des tangentes aux courbes méridiennes contenues dans les plans verticaux AP , AQ .

On remarquera qu'ayant projeté les points P et Q en π et q sur la droite XY , les quatre points π , m , μ , r sont sur la même ligne droite. Il en est de même des quatre points n , r' , λ , q , qui sont aussi sur la même droite qn .

Cette solution, quoiqu'elle soit moins rigoureuse que la précédente, est néanmoins très-admissible dans la pratique du dessin graphique.

On a trouvé, pour les traces horizontales des plans tangens à l'ellipsoïde aux points (I, i) , (L, l) les droites BP , BQ ; leurs traces sur le méridien vertical AE , parallèle au plan vertical de projection, passeront par des points déjà construits. En effet, ce plan méridien coupe la droite donnée au point (E, e) ; la tangente à la section méridienne qui passe par le point de contact (f, μ) , coupe l'axe de révolution au point (A, r) qui est dans le plan méridien AE ; donc la droite er est sur ce plan, la trace du plan tangent au point (I, i) de l'ellipsoïde. Cette droite er prolongée, passe par le point s projection verticale du point S , où le plan méridien AE coupe la trace horizontale BP du plan tangent. De ces trois points r , e , s , deux suffisent pour déterminer la trace du premier plan tangent sur le plan vertical AE parallèle au plan vertical de projection XY . Quant à la trace er' du second plan tangent au point (L, l) de l'ellipsoïde, elle est aussi déterminée par les projections e , r' , t de trois points, dont le premier est sur la droite donnée, le second à l'intersection de l'axe de révolution et de la tangente à la section méridienne au point de contact (I, i) , et le troisième à l'intersection des traces horizontales BT et AT du plan tangent et du plan méridien AE .

PROBLÈME VII. — (Fig. 1, pl. 27.)

Mener une tangente à une hélice, 1^o par un point donné sur l'hélice; 2^o parallèlement à un plan donné.

36. *Solution.* Parmi les courbes tracées sur un cylindre, celle qui jouit de cette propriété, que ses tangentes fassent avec les droites du cylindre des angles égaux, se nomme *hélice*. Il suit de cette définition que l'hélice se transforme sur le développement du cylindre en une ligne droite; et si l'on considère une partie quelconque de cette droite comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle qui a pour côté une droite du cylindre, l'autre côté sera la transformée d'une portion de la section droite du cylindre. Le rapport de ces deux côtés est constant; la valeur de ce rapport détermine l'angle que la tangente à l'hélice fait avec la droite du cylindre qui passe par le point de contact. Un fil plié librement sur un cylindre, forme une hélice. Lorsque le cylindre a pour base une courbe fermée, l'hélice coupe une droite quelconque de ce cylindre en une suite de points équidistans; la distance de deux points consécutifs se nomme *pas de l'hélice*; la portion d'hélice comprise entre ces deux points, forme un tour entier; elle se projette sur un plan perpendiculaire aux droites du cylindre, suivant la base ou la section droite du cylindre. Le développement de cette base et le pas de l'hélice sont dans un rapport constant. Le même rapport subsiste entre les fractions semblables du contour de la base et de la hauteur du pas. Cette propriété donne la construction suivante de l'hélice sur un cylindre droit à base circulaire.

Construction de l'hélice. (Pl. 27, fig. 1.)

37. Soit 0123.... 8.... 12.... 0 la circonférence, base du cylindre droit; on la divise en arcs égaux, à partir du point 0, origine de l'hélice. Le pas de l'hélice étant donné, on le partage dans le même nombre de parties égales, et on porte ces parties sur les droites du cylindre, qui passent par les points de division 1, 2, 3, etc. de la circonférence; savoir une partie sur la droite du point 1, deux parties sur la droite du point 2, et ainsi de suite. L'hélice passe par les extrémités de ces droites, et a son origine au point 0.

Pour construire la projection de l'hélice sur un plan vertical XY parallèle au rayon Oo, on y projette les droites verticales du cylindre, et les distances des extrémités a, b, c, d, etc. de ces projections à la droite XY, sont respectivement égales aux droites du cylindre, comprises entre sa base et l'hélice.

Si l'on a divisé la circonférence de la base en seize parties égales, la perpendiculaire $44'd$ à la droite XY , coupe cette droite au point $4'$, et prenant $4'd$ égal au quart du pas de l'hélice, le point d appartient à la projection verticale du point de l'hélice, dont la projection horizontale est le point 4. Menons d'abord la tangente à l'hélice par ce point; cette tangente est sur le plan tangent au cylindre, qui passe par le même point, et dont la trace sur le plan horizontal est la droite $4L$. Cette droite parallèle à XY est évidemment la projection horizontale de la tangente. Développant le cylindre sur le plan tangent vertical $4L$, le quart de circonférence 01234 deviendra sur le développement la droite $4L$, et on aura sur le plan de développement un triangle rectangle $ld4'$, dont le côté $4'l = 4L$, et l'hypothénuse dl sera la projection verticale de la tangente à l'hélice au point $(4, d)$. Cette tangente fait avec la droite du cylindre, qui passe par le point de contact $(4, d)$, un angle $ld4'$; elle coupe le plan horizontal au point L , dont la projection verticale est le point l de la droite XY .

On aura la tangente en un point quelconque de l'hélice, autre que celui $(4, d)$, pour lequel cette tangente est parallèle au plan vertical de projection, en menant par le point donné de l'hélice, et dans le plan tangent au cylindre qui passe par ce point, une droite faisant avec l'arête du cylindre un angle égal à l'angle connu $ld4'$. D'après la définition de l'hélice, cet angle est constant pour tous les points de la courbe.

Seconde partie de la solution. — Mener une tangente à l'hélice, qui soit parallèle à un plan donné ()? (Pl. 17.)*

38. Les tangentes à l'hélice font avec les arêtes du cylindre un angle constant; d'où il suit qu'elles sont parallèles aux arêtes d'un cône droit, qui aurait pour axe une parallèle aux arêtes du cylindre. Ce cône étant construit, il n'y a aucune tangente à l'hélice qui n'ait sa parallèle sur la surface du cône. Mais un plan mené par le sommet de ce cône parallèlement au plan donné, coupe en général le cône suivant deux droites, et les tangentes parallèles à ces droites sont évidemment parallèles au plan donné; ainsi la question proposée est ramenée à celle-ci : *Mener une tangente à une hélice parallèle à une droite dont on a déterminé la position?* Cette droite étant projetée sur le plan horizontal de la section droite du cylindre, la tangente à cette section parallèle

(*) J'ai résolu cette question, pour expliquer le mouvement ascensionnel de l'eau dans la vis d'Archimède. (Voyez le *Traité des Machines*, 4^e édition, 1828, page 180.)

à la projection de la droite, est la projection horizontale de la tangente à l'hélice demandée. De cette projection, on déduit facilement le point de contact et la projection verticale de la tangente.

Suite de l'explication de la fig. 1, pl. 27.

39. Soit (O, dd') l'axe du cylindre sur lequel l'hélice est tracée; on prend sur cet axe, un point (O, d') pour sommet du cône-droit qui a pour côté la droite dl faisant avec dq' l'angle ldq' égal à celui que la tangente à l'hélice fait avec l'arête du cylindre. La base du cône droit est le cercle décrit du point O comme centre, avec $OP = dl$ pour rayon. Le plan mené par le sommet (O, d') de ce cône, parallèlement au plan donné, le coupera suivant deux droites; et si l'on suppose le plan donné par ses deux traces $ZZ', Z'z$, dont l'une ZZ' est perpendiculaire à XY , le plan parallèle $(TRSd)$ coupera le cône suivant deux arêtes qui se projettent sur le plan horizontal en OR et OT , rayons du cercle décrit du point O comme centre. Les extrémités R, T de ces rayons sont déterminées par l'intersection de la droite ST , perpendiculaire à XY , et du cercle décrit du point O comme centre, avec $OP = dl$ pour rayon. Les tangentes QQ', VV' à la section droite du cylindre, respectivement parallèles aux droites OT, OR , sont les projections horizontales des tangentes à l'hélice parallèles au plan donné, et on a les points V, Q pour les projections horizontales des points de contact.

Les perpendiculaires Vv, Qq à XY déterminent les projections verticales v, q de ces points. Les parallèles $v's, q'q'$ à la trace verticale $Z'z$ du plan donné, sont les projections verticales des tangentes à l'hélice aux points $(V, v'), (Q, q')$.

Les droites Vv, Qq prolongées, couperaient la projection verticale de l'hélice en une suite de points équidistans tels que v', q' , pour lesquels les tangentes $v'q', q'q'$ à cette projection verticale seraient parallèles à la trace $Z'z$ du plan donné $(ZZ'z)$.

Si l'on proposait de mener une tangente à la projection verticale $abcd, \dots$ de l'hélice, qui fût parallèle à une droite donnée, on résoudreait ce problème de la même manière que le précédent, en regardant la droite donnée comme la trace d'un plan perpendiculaire au plan vertical de projection.

PROBLÈME VIII.

Mener une tangente à une épicycloïde sphérique, par un point donné sur cette courbe ? (Fig. 2, pl. 27.)

40. *Définition de l'épicycloïde.* De deux cônes droits qui se touchent et qui ont même sommet, l'un étant fixe et l'autre mobile, un point quelconque du cône mobile décrit une épicycloïde sphérique.

41. *Solution du problème.* Pendant que le cône mobile roule sur le cône fixe, la distance du point générateur de l'épicycloïde au sommet commun des deux cônes, ne varie pas; d'où il suit que l'épicycloïde appartient à une sphère qui a pour rayon cette distance, et pour centre, le sommet commun des deux cônes. Cette sphère coupe le cône fixe et le cône mobile suivant deux cercles, dont les plans font entre eux un angle égal à celui qui est compris entre les axes de ces cônes. Le cercle base du cône mobile touche dans toutes ses positions le cercle base du cône fixe, et pour chaque position du premier cercle, un point de ce cercle appartient à l'épicycloïde. La droite menée de ce point de l'épicycloïde au point de contact du cercle fixe et du cercle mobile varie de grandeur; elle est d'abord nulle; elle croît jusqu'à ce qu'elle soit égale au diamètre du cercle mobile; ensuite elle décroît et redevient nulle; elle est à très-peu près constante, pendant que le point générateur passe d'une position à une autre, qui en est infiniment voisine; dans le même temps, le point de contact du cercle fixe et du cercle mobile, ne change pas sensiblement; ce point peut donc être considéré comme le centre d'une sphère sur laquelle se trouve l'élément de courbe décrit par le point générateur de l'épicycloïde. Il suit de là que ce point, dans un instant quelconque de son mouvement, décrit un élément de courbe qui est à la fois sur deux sphères, l'une qui a pour rayon la distance constante de ce point au sommet commun des deux cônes, l'autre qui a pour rayon la distance variable de ce point à celui où le cercle mobile touche le cercle fixe; or un élément de courbe ne peut être à la fois sur deux sphères, qu'il ne soit sur l'intersection de deux plans qui touchent ces sphères; donc 1° la tangente en un point quelconque d'une épicycloïde sphérique, est une droite, intersection de deux plans qui touchent deux sphères dont les centres et les rayons sont donnés; 2° cette tangente est perpendiculaire au plan mené par le point de l'épicycloïde et par les centres des deux sphères.

Explication de la figure 2, pl. 27. — Description de l'épicycloïde sphérique.

42. L'axe du cône fixe étant supposé vertical, soit décrit sur le plan horizontal le cercle ABCD (*pl. 27, fig. 2*) du cône fixe, qui est constamment touché par le cercle du cône mobile, sur lequel se trouve le point générateur de l'épicycloïde.

Soit AB un arc quelconque du cercle ABCD compris entre l'origine A de l'épicycloïde et le point de contact de ce cercle ABCD et du cercle mobile dans une position quelconque. Le plan vertical SBE' contient 1° les axes Ss , $s's'$ des deux cônes; 2° l'arête sB, suivant laquelle ces deux cônes se touchent; 3° l'angle E'Be que font entre eux le plan horizontal du cercle fixe et le plan incliné (eBN) du cercle mobile; 4° le diamètre Be de ce dernier cercle. En supposant que le plan du cercle mobile tourne autour de sa trace horizontale Bn comme charnière, pour s'appliquer sur le plan du cercle fixe ABCD, et que l'arc Bf' du cercle mobile soit de même longueur que l'arc AB du cercle fixe, le point f' sera la position du point générateur de l'épicycloïde qui correspond au point de contact B, par lequel passe l'arête de contact sB des deux cônes. La projection horizontale F' du point f' est sur la droite f'F' perpendiculaire à la droite Bn. Ayant mené f'F' perpendiculaire au diamètre BE', l'arc de cercle décrit du point B comme centre, avec un rayon égal à BF, coupe la droite Be au point f, projection du point f' sur le plan vertical SBe. La perpendiculaire f_gF' abaissée du point f sur le diamètre BE', coupe la droite f'F' au point F', projection horizontale du point f' de l'épicycloïde. Quant à la hauteur de ce point f' au-dessus du plan horizontal, elle est évidemment égale à f_g.

43. Supposons maintenant que le point de contact du cercle fixe et du cercle mobile, au lieu d'être en B, soit en K; on pourrait 1° mener le plan vertical SK, qui contiendrait les axes des deux cônes; 2° l'abattre sur le plan horizontal, et trouver un point G de la projection horizontale de l'épicycloïde, comme on a trouvé le point F'; mais il n'est pas nécessaire d'employer un second plan vertical SK; le premier SBe suffirait. En effet, soit Bf'g' un arc du cercle mobile d'une longueur égale à celle de l'arc ABK; on pourrait tracer le cercle du diamètre KI = Be, et opérer sur ce cercle comme sur celui du diamètre BE', qui touche le cercle fixe au point B. Regardant ce point B comme le point de contact K, la projection horizontale du point g' serait en G', sur la droite g'G' perpendiculaire à la tangente Bn des deux cercles fixe et mobile. Menant les droites SG', BG', on formera le triangle SBC' qui étant transporté en SKG, détermine le point G qui est la projection horizontale du

point g' du cercle mobile, lorsque ce cercle touche le cercle fixe au point K. En supposant que le point de contact de ces deux cercles soit en C, extrémité d'un arc ABC du cercle fixe, égal en longueur à la demi-circonférence du cercle mobile, le point générateur de l'épicycloïde a pour projection horizontale un point E du rayon SC; tel que CE est égal à la projection horizontale B u du diamètre Be du cercle mobile.

44. L'arc ACD du cercle fixe étant égal en longueur à la circonférence entière du cercle mobile, le point D appartient à l'épicycloïde sphérique, et peut être considéré comme l'origine d'une autre branche D u de l'épicycloïde, égale à la première, et qui aurait pour projection horizontale une courbe qui ne différerait pas de AED; les deux branches ont pour tangente commune au point D, le rayon SD.

45. Il suit de cette construction, 1^o que l'épicycloïde sphérique est en général composée d'une infinité de branches égales, qui se projettent sur le plan perpendiculaire à l'axe du cône fixe, suivant des courbes égales; 2^o que le nombre de branches est fini, lorsque la circonférence du cercle mobile est contenue un nombre entier de fois dans la circonférence du cercle fixe; 3^o que ces branches en nombre fini ou infini ont sur la base circulaire de ce cône, des points de rebroussement; 4^o que l'arc de cette base, compris entre deux points consécutifs de rebroussement, est égal en longueur à la circonférence du cercle mobile.

Construction de la tangente à l'épicycloïde sphérique.

46. *Première solution.* Le point de l'épicycloïde sphérique pour lequel on demande la tangente, est en f' sur le cercle mobile du diamètre BE'; il a pour projection horizontale le point F', et pour projection sur le plan vertical SBE', le point f . La tangente demandée est (art. 41) perpendiculaire au plan des droites menées du point (F', f) aux centres s et B des deux sphères dont chacune contient l'élément d'épicycloïde; or la première droite (SF', sf) rencontre le plan horizontal au point V; la seconde droite passe par le point B; donc le plan des deux droites (SF', sf), (BF', B f) a pour trace sur le plan horizontal la droite BV, et sur le plan vertical, la droite sB ; donc la tangente demandée a pour projections horizontale et verticale les droites FT, fT respectivement perpendiculaires aux traces BV, sB , et elle rencontre le plan horizontal au point (T, t).

47. *Deuxième solution.* Soit encore f' le point donné sur l'épicycloïde, dont la projection horizontale est F'. La tangente en ce point (art. 41) est la droite intersection de deux plans tangens, l'un à la sphère qui a son centre au sommet (S, s) du cône mobile et du cône fixe, l'autre à la sphère qui a pour rayon

la droite $f'B$, et dont le centre est le point de contact B du cercle fixe et du cercle mobile sur lequel se trouve le point f' de l'épicycloïde. Le rayon de la première sphère, mené par le point f' , ayant pour projection horizontale la droite SF' , la trace du plan qui touche cette sphère au point f' est perpendiculaire à cette droite SF' ; de plus ce plan passe par la tangente $f'l$ du cercle $Bf'g'E$; or cette tangente coupe le plan horizontal au point l de la tangente Bln du cercle fixe; donc le plan tangent à la première sphère, a pour trace sur le plan horizontal la droite lm perpendiculaire à SF' .

Le plan tangent à la seconde sphère au point f' passe par la droite $f'N$ tangente au grand cercle de cette sphère, décrit du point B comme centre avec un rayon égal à Bf' ; or cette tangente coupe le plan horizontal au point N de la droite Bln , qui touche le cercle fixe au point B ; donc si de ce point N on abaisse une perpendiculaire Np sur la projection horizontale Bf' du rayon Bf' , cette perpendiculaire sera la trace horizontale du plan tangent à la seconde sphère; elle coupe la trace lm du plan tangent à la première sphère en un point T de la tangente, à l'épicycloïde. Donc la droite menée par les points T et F' , touche la projection horizontale de l'épicycloïde au point F' .

48. Le plan tangent à la seconde sphère au point f' , étant perpendiculaire au rayon Bf' , et au plan du cercle mobile $Bf'g'E$, il passe par la droite epr menée perpendiculairement au plan Be du cercle mobile, par le point E de ce cercle. Or cette droite epr coupe le plan horizontal au point p ; donc la droite Np est la trace du plan tangent à la seconde sphère, et doit être perpendiculaire à la projection horizontale Bf' du rayon qui passe par le point de contact F' . Le plan tangent en f' à la sphère du rayon Bf' perpendiculaire au plan du cercle mobile, coupe ce second plan suivant la droite $f'E$, qui passe par l'extrémité E du diamètre BE ; d'où il suit que cette droite est la projection de la tangente à l'épicycloïde menée par le point f' sur le plan du cercle mobile.

Le plan tangent à la sphère du rayon Bf' au point f' du cercle mobile $Bf'g'E$, est aussi tangent au cône qui a pour base l'épicycloïde sphérique, et pour sommet le point r de la droite Ss , où cette droite est rencontrée par la perpendiculaire per à l'extrémité du diamètre Be ; ce qui est évident, puisqu'il passe par une tangente à la ligne qui sert de base au cône. Mais il est important de remarquer que pour une position quelconque Kly du cercle mobile, on a sur ce cercle un point γ de l'épicycloïde sphérique, tel que le plan conduit par la droite γI , perpendiculairement à la droite γK , qui joint le point γ de l'épicycloïde et le point de contact K des cercles fixe et mobile, est tangent au cône qui a pour sommet le point r , et pour base l'épicycloïde sphérique. En effet, l'angle $K\gamma I$ étant droit, le côté γI de cet angle passe né-

cessairement par le point I , extrémité du diamètre KI du cercle mobile; le plan γI perpendiculaire à la droite $K\gamma$ située dans le plan du cercle mobile, et par conséquent perpendiculaire à ce plan, passe par la droite qu'on mènerait par le point I perpendiculairement au plan du cercle mobile : or cette dernière droite coupe l'axe Ss au point r , puisque ce point r est le sommet du cône droit engendré par la droite er , qui tourne autour de la droite Ssr ; donc le plan γI , passant par le point γ de l'épicycloïde sphérique, ainsi que le plan $f'E$ passant par le point f' de cette courbe, est tangent au cône qui a son sommet au point r , et dont la base est l'épicycloïde sphérique.

49. *Conclusion.* Quelle que soit la position du cercle mobile, on doit distinguer sur ce cercle trois points : 1° le point générateur de l'épicycloïde; 2° le point de contact du cercle fixe et du cercle mobile; 3° l'extrémité du diamètre qui passe par ce point de contact. Ayant élevé par ce dernier point une perpendiculaire au plan du cercle mobile, cette perpendiculaire coupe l'axe du cône fixe en un quatrième point, qui est invariable comme l'inclinaison du plan du cercle mobile, par rapport au plan du cercle fixe; le plan mené par cette perpendiculaire et par le point générateur de l'épicycloïde sphérique, est tangent au cône qui a pour sommet le quatrième point, et pour base l'épicycloïde sphérique.

PROBLÈME IX. (Pl. (A) in-folio, pl. 28 in-4°.)

Connaissant les distances d'un point à trois droites, construire ce point?

50. *Solution par l'intersection de trois cylindres.* Nommons A, B, C les trois droites données; a, b, c les distances connues du point cherché à ces droites; tous les points qui sont à la distance a d'une droite donnée A , appartiennent à un cylindre droit dont l'axe est la droite donnée, et qui a pour base un cercle du rayon a ; la surface de ce cylindre est donc un lieu géométrique du point demandé. Par la même raison, les deux cylindres droits qui ont pour axes les droites B et C , et pour bases des cercles dont les rayons sont respectivement égaux aux distances connues b et c , contiennent le point demandé; donc ce point est déterminé par l'intersection de trois cylindres droits dont on connaît les axes et les rayons. Les trois cylindres se coupent deux à deux, suivant trois courbes à double courbure; les points communs à ces trois courbes satisfont aux trois conditions d'être aux distances connues a, b, c de trois droites données A, B, C . On démontre par l'analyse que le nombre de ces points, toujours pair, est au plus huit, et au moins deux.

Les données du problème sont 1° les projections horizontales et verticales de trois droites; 2° les distances du point demandé à ces droites. Ces données

déterminent les axes et les rayons des cylindres droits, lieux géométriques du point cherché. Pour trouver les lignes d'intersection de ces cylindres considérés deux à deux, par la méthode exposée (art. 172, livre 1^{er}), on cherche d'abord leurs traces sur le plan horizontal; ces traces sont des ellipses (A), (B), (C), (*pl. A, in-folio*), dont les demi-petits axes sont respectivement égaux aux distances a, b, c du point cherché aux trois droites données; on construit ensuite les grands axes des ellipses de la manière suivante.

Explication de la pl. (A, in-folio).

51. Soient (A) A', (B) B', (C) C' les projections horizontales des droites données, et (A), (B), (C) les points où elles coupent le plan horizontal; ces droites font avec leurs projections horizontales les angles A (A) A', B (B) B', C (C) C'. Élevant par les points (A), (B), (C) des perpendiculaires aux droites (A) A, (B) B, (C) C, et portant sur ces perpendiculaires des longueurs (A) a , (B) b , (C) c , respectivement égales aux distances données a, b, c , on mène par leurs extrémités a, b, c les droites aa', bb', cc' respectivement parallèles aux droites (A) A, (B) B, (C) C. Ces parallèles coupent le plan horizontal aux points α, β, γ , qui déterminent les demi-grands axes (A) α , (B) β , (C) γ des ellipses $\alpha\alpha'\alpha'', \beta\beta'\beta'', \gamma\gamma'\gamma''$, traces des trois cylindres sur le plan horizontal.

Désignant par les lettres A, B, C les trois cylindres qui ont respectivement pour bases les ellipses $\alpha\alpha'\alpha'', \beta\beta'\beta'', \gamma\gamma'\gamma''$, on trouve :

1^o Que les cylindres A et B se coupent suivant une ligne à deux branches, qui a pour projections horizontales les courbes 1R2E431, 56D78D5; les projections verticales de ces deux branches sont marquées des mêmes lettres et des mêmes chiffres.

2^o Les cylindres A et C se coupent aussi suivant une ligne à deux branches, dont les projections marquées des mêmes lettres ou chiffres, sont 12G65G', 3478FF.

3^o Les cylindres B et C se pénètrent suivant une courbe à une seule branche, marquée sur l'un et l'autre plan de projection par les lettres et chiffres 12K4H3To786H'5S1. On remarquera qu'il y a deux points doubles sur la projection verticale, et un seul sur la projection horizontale.

Les trois courbes ont huit points communs, dont les projections sont marquées sur les deux plans de projection des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Chacun de ces points satisfait à la condition d'être aux distances connues des trois droites données.

On a choisi les données du problème, de manière que le nombre de solutions fût le plus grand possible; en faisant varier les données, ce nombre pourrait se réduire à 6, 4 ou 2.

Explication de la pl. 28, in-4°.

52. On simplifierait la solution précédente par le choix des plans de projection. Supposons en effet le plan horizontal perpendiculaire à l'une des droites données; le premier cylindre (A) y sera projeté suivant le cercle de sa base; soit A (*fig. 1, pl. 28*) le centre de ce cercle du rayon donné AB (*fig. a*); les deux autres cylindres B et C ont respectivement pour rayons les droites données AC, AD (*fig. a*).

La projection horizontale de l'axe du cylindre B étant BB' (*fig. 1*), le plan vertical de projection (*fig. 2*), dont la trace horizontale XY est parallèle à BB', sera parallèle aux axes des deux cylindres A et B. Soient CC', cc' les projections (*fig. 1 et 2*) de l'axe du troisième cylindre; des deux projections des axes des cylindres B et C sur les plans (*fig. 1 et 2*), on déduira les projections $x'a'$, $\gamma\gamma'$ (*fig. 3*) de ces mêmes axes sur un plan vertical X'Y' (*fig. 3*) parallèle à l'axe (CC', cc') du cylindre C. Supposons ce cylindre C coupé par un plan (EFG), dont les traces EF, FG (*fig. 1 et 3*) sont respectivement perpendiculaires aux droites CC', $\gamma\gamma'$, projections de son axe. La section sera un cercle du rayon donné AD (*fig. a*). Faisant tourner ce plan autour de sa trace horizontale EF, et le couchant sur le plan horizontal, le centre du cercle (*d, d'*) (*fig. 1 et 3*) s'applique sur le plan horizontal en D (*fig. 4*). Ayant décrit de ce point D comme centre, un cercle du rayon DO ou DP = AD (*fig. a*), les tangentes ON, PQ à ce cercle, parallèles à CC', sont les limites de la projection horizontale du cylindre C. Les limites de la projection verticale (*fig. 2*) du même cylindre sont les droites uv , $u'v'$, parallèles à cc'. Le cylindre B a pour limites de sa projection verticale (*fig. 2*) les droites $k'k'$, $l'l'$ parallèles à la droite bb' et distantes de cette droite de la quantité bk' ou bl , égale à AC (*fig. a*). Les limites de la projection horizontale du même cylindre sont les parallèles HH', II' (*fig. 1*), à la droite BB', distantes de cette droite de la quantité BH ou BI égale au rayon AC (*fig. a*). Le cylindre A a pour limites de sa projection verticale les verticales m , m' qui sont parallèles à la droite aa' (*fig. 2*), et se projettent sur le plan horizontal (*fig. 1*) aux points T et T'.

Ayant rapporté les trois cylindres A, B, C aux quatre plans *fig. 1, 2, 3, 4*, on projette la courbe d'intersection des cylindres A et B sur le plan incliné (*fig. 4*) de la base du cylindre C; et pour obtenir la projection de cette courbe à double courbure, il est nécessaire de projeter une section circulaire du cylindre B sur le plan vertical X'Y' (*fig. 3*). On prend pour cette section le cercle du rayon $k'l$ (*fig. 2*) qui se projette sur le plan horizontal

(fig. 1) suivant l'ellipse KLHI, et sur le plan vertical (fig. 3) suivant l'ellipse klhi, dont l'un des axes principaux est dirigé suivant la droite $x'\theta''$, projection de l'axe du cylindre B.

Une autre opération préliminaire qui n'est pas moins nécessaire, consiste à projeter ce même axe du cylindre B sur le plan incliné de la figure 4 : on prend sur cet axe deux points (B, β''), (N, n'') (fig. 1 et 3), et de chacun de ces points on abaisse une perpendiculaire sur le plan (EFG). Les pieds de ces perpendiculaires β''' , n''' (fig. 3), ramenés (fig. 4) en m et n sur les parallèles Bm, Nn (fig. 1) à la droite CC', déterminent la projection mn de l'axe du cylindre B sur le plan de la fig. 4. Cela posé, on coupe les deux cylindres (A) et (B) par une suite de plans verticaux parallèles à leurs axes ou à la droite BB' (fig. 1), et on projette les droites contenues dans ces plans sur le plan de la fig. 4; leurs projections se coupent en des points, et le lieu de ces points forme (fig. 4) la courbe 123...8, qui coupe le cercle du diamètre ODP en huit points, projections des huit points communs aux trois cylindres, sur le plan (fig. 4) de la base du cylindre (C). Les projections des droites du cylindre A sur ce plan, sont perpendiculaires à la droite EF, et les projections des droites du cylindre B sont parallèles à la droite mn ; ainsi la projection 12...8 de la courbe d'intersection des deux cylindres A, B sur le plan incliné (fig. 4) se construira par la même méthode qu'on a suivie (art. 172, livre I^{er}) pour trouver la projection de cette courbe sur un plan horizontal ou vertical.

Les projections horizontales des points communs aux trois cylindres, sont nécessairement sur le cercle du diamètre TAT' (fig. 1), base du cylindre A, et sur des perpendiculaires abaissées des points 1, 2, 3... 8 (fig. 4) sur la droite EF, lesquelles coupent le cercle TAT' en huit points marqués également des chiffres 1, 2, 3... 8. Les huit points de l'espace déterminés par leurs projections (fig. 1 et 4), satisfont aux conditions du problème, d'être à des distances données de trois droites dont la position est aussi donnée; et si l'on demande les projections de ces points sur l'un des plans verticaux (fig. 2 et 3), on fera pour chacun des opérations que nous allons indiquer pour le point (4, 4), (fig. 1 et 4).

On portera 4 γ (fig. 4), distance du point 4 à la trace horizontale EF du plan (EFG), sur FG (fig. 3) de F en 4'. La parallèle 4'4'' à $\beta''\beta'''$ et la perpendiculaire 4'4'' à X'Y' (fig. 3) se coupent au point 4'' (fig. 3), distant de l'horizontale X'Y' de la hauteur verticale 4'4''. Portant cette hauteur sur la perpendiculaire 4'4''' à XY (fig. 2), de 4' en 4''', les points 4''' et 4'' sont (fig. 2 et 3) les projections verticales du point (4, 4), (fig. 1 et 4).

Les arêtes des trois cylindres qui se rencontrent au point (4, 4', fig. 1 et 2),

ont pour projections verticales (*fig. 2*) les droites $4''4'$, $4''r$, $4''\pi$ respectivement parallèles aux projections verticales aa' , bb' , cc' des axes des trois cylindres. La parallèle $4''r$ à bb' coupe le cercle du diamètre $k'l'$ au point s , qui se projette sur le plan vertical (*fig. 2*) en r , et sur le plan horizontal (*fig. 1*) en S ; la distance SR de ce point S à la droite BB' , est égale à l'ordonnée rs du cercle.

53. Dans la première solution du problème par l'intersection de trois cylindres, on a construit les projections de deux courbes à double courbure; la solution que nous venons d'exposer est plus simple, puisque la projection d'une seule de ces courbes, et un cercle d'un rayon donné, déterminent les points communs aux trois cylindres.

Ayant trouvé l'intersection des deux cylindres A et B , et l'ayant projetée sur le plan (*fig. 4*) perpendiculaire à l'axe du troisième cylindre, on peut disposer de la grandeur du rayon de ce dernier cylindre et de la position de son centre, pour obtenir le plus grand nombre de points communs aux trois surfaces cylindriques. Ces trois surfaces étant de révolution, on pourrait encore trouver les points qui leur sont communs, en cherchant les points de rencontre de l'un des cylindres et de la ligne d'intersection des deux autres (art. 201, liv. I^{er}). Nous appliquerons cette méthode à la solution des deux problèmes suivans.

PROBLÈME X. (Pl. 29.)

On donne sur une carte topographique trois points d'un terrain. Un observateur se transporte successivement à ces trois points, muni d'un fil à plomb et d'un instrument tel qu'un graphomètre, propre à mesurer les angles. Il mesure les angles que les verticales menées par les trois points font avec les rayons visuels dirigés de chacun de ces points vers un quatrième; ces angles étant connus, on propose de rapporter le quatrième point sur la carte; et de trouver sa cote, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus du plan horizontal auquel on rapporte tous les points du terrain?

54. *Solution par l'intersection de trois cônes droits.* Désignons par les lettres A , A' , A'' les trois points connus sur le terrain et sur la carte; V , V' , V'' les trois verticales passant par ces points. Nommons α , α' , α'' les angles des verticales et des rayons visuels menés des points A , A' , A'' vers le quatrième point du terrain, qu'il s'agit de rapporter sur la carte. Si l'on considère le cône droit dont le sommet est au point donné A , qui a pour axe la verticale V , et dont le côté fait avec l'axe l'angle α , tous les points de la surface de ce cône satisfont à

cette condition, que le rayon visuel dirigé de l'un quelconque de ces points vers le point A, fasse avec la verticale V l'angle donné a ; d'où il suit que cette surface conique est un lieu géométrique du point demandé. On démontre de la même manière que ce point a pour lieux géométriques deux autres cônes droits, qui ont pour axes les verticales V' , V'' menées par les points B et C, pour sommets ces points, et dont les côtés font respectivement avec les axes les angles donnés b et c . Le point demandé est donc l'intersection de trois cônes droits, dont les axes sont verticaux, qui ont pour sommets trois points donnés, et dont les côtés font avec les axes des angles connus.

Considérant ces cônes deux à deux, et les coupant par un système de plans horizontaux qui donnent pour sections de l'un et l'autre cône, des cercles, on trouvera par cette méthode ou par celle qui a été exposée (art. 179, liv. I^{er}), la courbe d'intersection des deux cônes, tant en projection horizontale qu'en projection verticale. Les points communs aux trois courbes qui résultent de la pénétration des trois cônes satisfont aux conditions du problème.

Explication de la planche 29.

55. On prend pour plan horizontal de projection le plan de la carte topographique, et pour le plan vertical, un plan parallèle à la droite qui joint deux des trois points donnés. Soient A, B, C (*fig. 1*) les projections horizontales de trois points connus sur le terrain; les cônes de ces points, ou leurs distances au plan horizontal étant données, leurs projections sur le plan vertical XY seront aussi données. Soient a , b , c ces projections; les cotes des points donnés sont, d'après l'échelle de la carte, égales aux longueurs des verticales A'a, B'b, C'c.

Un observateur placé au point (A', a) dirige un rayon visuel vers le point donné sur le terrain, point qu'il s'agit de rapporter sur la carte, et il mesure l'angle a (*fig. 2*), que la verticale du point (A, a) fait avec le rayon visuel. Deux autres observations semblables donnent les angles b , c (*fig. 2*), que les verticales des points (B, b), (C, c) font respectivement avec les rayons visuels dirigés vers le point du terrain dont on demande la position sur la carte. Ces trois observations déterminent les trois surfaces coniques droites, qui sont les lieux géométriques du point cherché. Ces cônes n'ont point d'arêtes parallèles; d'où il suit (art. 185, liv. I^{er}) que leurs lignes d'intersections sont des courbes fermées: ces lignes se rencontrent en des points qui satisfont aux conditions du problème.

On construit la ligne d'intersection des deux surfaces coniques qui ont pour sommets les points (A, a), (B, b), en les coupant ou par un système de plans

qui passent par la droite (AB, ab) qui joint les deux sommets, ou par des plans horizontaux qui rencontrent les deux surfaces suivant des cercles. Cette ligne d'intersection se compose de deux branches dont les projections sont DEFG et LMNO sur le plan horizontal, et $defg, lmnno$ sur le plan vertical. La droite AB divise en deux parties égales les courbes fermées DEFG, LMNO; chacune de ces courbes correspond sur le plan vertical à une autre courbe $defg$ ou $lmno$, qui n'est pas terminée, et dont un point quelconque, tel que n , est la projection verticale de deux points de la ligne d'intersection des deux cônes, qui se projettent sur le plan horizontal en N et N'.

56. *Seconde solution.* (Même planche. 29.) Des trois surfaces coniques qui se pénètrent, la troisième qui a pour sommet le point donné (C, c), étant comme les deux premières, une surface de révolution dont l'axe est la verticale (C, C'cc'), on trouve (art. 201, liv. 1^{re}) le point commun aux trois surfaces, par la considération d'une quatrième surface de révolution, qui a pour génératrice la ligne d'intersection des deux premières surfaces, et pour axe la droite (C, C'cc'). Le plan vertical PCQ mené par cet axe, parallèlement au plan vertical de projection XY, coupe la quatrième surface de révolution, suivant les courbes $d'e'f'g', l'm'n'o'$, et leurs égales $d'e'f'g', l'm'n'o'$ placées symétriquement par rapport à l'axe C'cc' : or la droite cp ou cq génératrice du troisième cône, qui fait avec la droite C'cc', l'angle C'cp égal à l'angle donné c (fig. 2), coupe la section méridienne de la surface de révolution auxiliaire, aux quatre points e', g', o', n' ; donc si l'on mène par ces points quatre horizontales qui rencontrent les courbes $defg, lmnno$ aux quatre points e, g, o, n , ceux-ci seront les projections verticales des quatre points qui satisfont aux conditions du problème. Pour avoir les projections horizontales E, G, O, N correspondantes, on abaissera du point n , par exemple, la perpendiculaire nNN' sur la droite XY intersection des deux plans de projection. Cette perpendiculaire rencontre la courbe LMNO en deux points N, N', dont les distances au point C sont respectivement CN, CN'. Le premier N correspond à la projection verticale n de l'un des points cherchés, parce que sa distance CN à l'axe (C, C'cc') est égale à la droite un' , qui mesure la distance du point n à la droite C'cc'. Le point N' ne peut pas être la projection horizontale du point cherché, dont n est la projection verticale, parce que la droite CN' est plus petite que la droite un' .

Le problème proposé a au plus quatre solutions, et d'après les données de la figure pl. 29, les quatre points qui satisfont aux conditions de ce problème, sont (E, e), (G, g), (O, o), (N, n).

PROBLÈME XI.

1° Étant donné un point et deux droites dans l'espace, mener par le point, un plan qui coupe les droites en deux autres points, tels que les trois points soient les sommets d'un triangle semblable à un triangle donné ? 2° Résoudre cette question dans le cas particulier où les deux droites données se rencontrent ?

Ce problème comprend celui-ci (problème XII, art. 63) :

Connaissant dans une pyramide triangulaire la base et les angles des arêtes opposés aux côtés de la base, construire le sommet de la pyramide ? (Voyez la Notice historique sur ce problème, à la fin du livre II.)

Première partie du problème. (Fig. A, pl. 30.)

57. *Solution.* Soient (fig. A en perspective) FD, (F)(E) deux droites quelconques données dans l'espace, et (Z) un point aussi donné; il s'agit de mener par ce point un plan qui coupe les droites FD, (F)E en deux autres points X, (Y) tels que le triangle X(Y)(Z) soit semblable à un triangle donné : nommant a, b, c les côtés de ce triangle, il faut qu'on ait :

$$(Z)X : (Z)Y : (Y)X :: c : b : a.$$

Du point (Z) on abaisse les perpendiculaires (Z)D, (Z)(E) sur les droites données FD, (F)(E); ayant mené par la droite FDX un plan parallèle à la droite (F)(E)(Y), on a projeté sur ce plan le point donné (Z), et sa projection est le point z . On a projeté sur le même plan la droite (F)(Y), et sa projection FY lui est parallèle. Considérant le plan de projection FXY comme horizontal, la droite (Z) z est verticale, et les deux droites (F)(Y), FY sont dans un plan vertical dont la trace horizontale est FY. Les droites (Y)Y, (E)E, (F)F sont les verticales qui projettent les points (Y), (E), (F) de la droite donnée (F)(X); la droite (F)F est la plus courte distance des deux droites données FD, (F)(E).

Le côté (Z)X du triangle cherché (Z)(Y)X n'étant pas connu, supposons-le égal à une droite V prise arbitrairement; les deux autres côtés (Z)(Y), (Y)X seraient dans cette hypothèse $\frac{\delta V}{c}$, $\frac{aV}{c}$: considérons le point (Z) fig. A comme le centre de deux sphères des rayons V , $\frac{\delta V}{c}$, et le point X comme le centre d'une troisième sphère du rayon $\frac{aV}{c}$; la première coupera la droite donnée FX au point p dont la distance au point (Z) est (Z)p = V; la seconde

sphère coupera la droite donnée $(F)(Y)$ au point (q) tel qu'on ait : $(Z)q = \frac{bV}{c}$; la troisième sphère coupera la même droite $(F)(Y)$ au point (q) .

Les points (q) et (r) étant connus sur la droite $(F)(Y)$, leurs projections horizontales q et r seront déterminées. Si la droite $(Z)p$ prise arbitrairement eût été égale au côté cherché $(Z)X$, le point (q) n'aurait pas différé du point (r) ; ces deux points auraient été réunis en un point unique (Y) , et par la même raison, les projections q, r, Y se seraient confondues ; d'où il suit qu'en construisant les deux parallélogrammes $Dpqm, Dprn$, le premier sur les trois points connus D, p, q , le second sur les trois points D, p, r , les sommets m et n devraient se confondre. Faisant varier la première droite $(Z)p$, on construira des points analogues à (q) et (r) , et deux nouveaux parallélogrammes qui auront pour sommets deux points m', n' , qui appartiennent à deux lieux géométriques, l'un la courbe Mmm' , l'autre la courbe Mnn' . Ces deux courbes (*) tracées sur le plan horizontal se rencontrent au point M , par lequel on mène la droite MY parallèle à FD , qui coupe la droite donnée FE au point Y . La verticale $Y(Y)$ coupe la seconde droite donnée $(F)(E)(Y)$ au point (Y) , l'un des sommets du triangle $(Z)(Y)(X)$; ce qui détermine le côté $(Z)(Y)$ de ce triangle, et par conséquent les deux autres côtés $(Z)(X), X(Y)$ de ce même triangle. En effet tirant la droite DM , et sa parallèle YX qui coupe la droite donnée FD au point X , on aura les trois sommets $X, (Y), (Z)$ d'un triangle semblable au triangle formé par les trois côtés donnés a, b, c .

58. Supposons maintenant que les deux droites données $FD, (F)(E)$ (*fig. A, pl. 30*), se rencontrent, ou que la seconde droite $(F)(E)$ se confonde avec sa projection FE ; alors les pieds $(E), (Y)$ des perpendiculaires abaissées du point (Z) sur la droite donnée $(F)(E)$, ne diffèrent pas de leurs projections E, Y ; la plus courte distance $F(E)$ des deux droites devient nulle, et ces droites comprennent entre elles l'angle DFE . Joignant le sommet F de cet angle et le point donné (Z) par la droite $F(Z)$, on forme la pyramide $FXYZ$, dont le sommet est en F , et dont la base $XY(Z)$ est un triangle semblable à un triangle donné. Développant l'angle trièdre F de cette pyramide sur le plan de la face XFY , on aura (*fig. B, pl. 30*) pour les deux autres faces adjacentes, les angles $ZFY, Z'FX$. Un plan mené par le point Z ou Z'' coupe la pyramide suivant un triangle qui a pour côtés les droites ZY, YX, XZ'' ; on demande que ce triangle soit semblable à un triangle donné. Pour résoudre cette question, il faut construire sur le plan de l'angle DFE (*fig. B*), les deux courbes Mmm', Mnn' de la figure perspective A.

(*) M. Bruno de Naples a le premier démontré que chacune de ces courbes était une hyperbole. (Voyez la notice historique à la fin du livre II.)

Deuxième partie du problème. (Fig. B, B. n° 1, pl. 30.)

59. Solution de cette question : Étant donnés un angle trièdre et un point sur l'une des trois droites intersections des plans qui forment cet angle, on propose de mener par le point donné, un plan qui coupe l'angle trièdre suivant un triangle de similitude donnée.

Soit (pl. 30, fig. B) $\angle XFY$ l'un des angles qui forment l'angle trièdre; les deux autres angles adjacens $\angle YFZ$, $\angle XFZ$, étant développés sur le plan du premier qu'on suppose horizontal, les deux droites FZ , FZ' se réunissent, lorsque l'angle trièdre est formé, sur une seule droite dont la projection horizontale est Fz ; le point z de cette projection est déterminé (page 139) par la rencontre des deux perpendiculaires ZEz , $Z'Dz$ abaissées des points Z , Z' respectivement sur les droites données FY , FX . Prenant pour plan vertical de projection, celui dont la trace horizontale est xy (fig. B. n° 1) parallèle à FX , le point Z ou Z' du développement de l'angle trièdre a pour projections horizontale et verticale, les points z , z' .

La question à résoudre consiste à mener par le point donné (z , z') de la droite FZ , ou FZ' , un plan qui coupe les deux droites FX , FY en deux points X et Y , tels que les trois droites XY , YZ , XZ soient les côtés d'un triangle semblable à un triangle donné; l'un de ces côtés est la droite XY tracée sur le plan horizontal; les deux autres côtés ont pour projections horizontales les droites Xz , Yz . En supposant le problème résolu, les trois points connus D , X , Y déterminent un parallélogramme $DXYM$, et le point M sommet de l'un des angles de ce parallélogramme. Ce point M a pour lieux géométriques deux courbes mm' , nn' tracées sur le plan de l'angle $\angle XFY$, que nous construirons en faisant varier l'un des côtés du triangle (XYz , xyZ), par exemple le côté (Xz , xZ).

Désignons par v le côté variable, et supposons qu'il soit l'homologue du côté a du triangle donné, dont les deux autres côtés sont b et c . Les trois côtés d'un triangle t semblable au triangle donné T étant p , $\frac{bv}{a}$, $\frac{cv}{a}$, ou vérifiera si le triangle t qui a l'un de ses sommets en un point déterminé (z , z') peut avoir ses deux autres sommets sur les droites données FX , FY . Pour faire cette vérification, on considérera le point (z , z') comme le centre de deux sphères des rayons v et $\frac{bv}{a}$, qui couperont, l'une la droite FX au point p , l'autre la droite FY au point q . Du point p comme centre avec un rayon égal à $\frac{cv}{a}$, on décrira un arc de cercle qui coupera la droite FY , en un point r ; la coïncidence des

points q et r n'a lieu que lorsque le côté v est égal à la droite $(zX, Z'x)$. Construisant sur les trois points D, p, q et D, p, r comme sommets d'angles, deux parallélogrammes, ils auront pour quatrième sommet, le premier un point m de la courbe $mm'm' \dots$, le second un point n de la courbe $nn'n'$; chacune de ces courbes étant le lieu géométrique du sommet M du parallélogramme $DXYM$, ce sommet est déterminé par l'intersection des deux courbes (*).

Connaissant le point M , on tirera la droite MD qui joint ce point, et le point connu D de la droite FX ; ensuite on mènera la parallèle MY à FX , qui coupera la droite FXY au point Y . La parallèle YX à DM coupera la droite FDX au point X , et on aura un triangle (XYZ, xyZ') semblable à un triangle donné, dont les trois sommets seront placés sur les trois droites intersections des trois plans qui forment l'angle trièdre donné.

Co. Supposons maintenant qu'il faille placer dans un angle trièdre un triangle donné T , on y placerait d'abord un triangle t semblable à celui-là, qui aurait son sommet en un point déterminé de l'une des arêtes de l'angle trièdre; considérant ce triangle t comme la base d'une pyramide triangulaire, la question proposée se réduit à couper cette pyramide par un plan parallèle à sa base, de manière que la section fût un triangle donné T . Pour compléter cette solution, il faut examiner en combien de manières on peut placer un triangle donné dans une pyramide, dont on connaît l'angle trièdre opposé à ce triangle.

Gi. Étant données les trois faces d'une pyramide, et faisant abstraction des angles supplémentaires de ces faces, il n'y a que deux manières de placer le triangle T ; ayant construit (art. 12) l'angle trièdre avec les trois faces données, le triangle T pourra se placer dans cet angle, ou dans l'angle symétrique de celui-là, et on aura deux pyramides de même sommet, comprises entre les mêmes plans, dont les bases opposées seront deux triangles égaux T et T . Mais si l'on considère les angles plans qui forment un angle trièdre, et les suppléments de ces angles plans, nous allons démontrer que l'angle trièdre peut se construire de huit manières différentes; chacun des huit angles trièdres ayant son symétrique, il s'ensuit qu'en général un triangle T peut être placé de seize manières différentes dans un angle trièdre, ainsi qu'on l'avait démontré depuis long-temps par les solutions algébriques.

Considérons l'angle trièdre formé par les trois angles plans A, B, C ; les plans de ces angles prolongés indéfiniment se coupent suivant trois droites,

(*) Chacune de ces courbes est une hyperbole, comme dans le cas général traité par M. BRUNO. (Voyez la notice historique, à la fin du livre II.)

et divisent l'espace en huit angles trièdres, dont quatre sont respectivement les symétriques des quatre autres. Les quatre premiers sont formés par les angles plans A, B, C et leurs suppléments combinés trois à trois dans l'ordre suivant (E) :

$$1^{\circ} A, B, C; 2^{\circ} A, B', C'; 3^{\circ} A', B, C'; 4^{\circ} A', B', C. \quad (E)$$

Chacun des quatre angles trièdres, correspondant à ces combinaisons, a son symétrique.

Les trois angles plans A', B', C' et leurs suppléments A, B, C donnent de même les quatre combinaisons suivantes (E') :

$$1^{\circ} A', B', C'; 2^{\circ} A', B, C; 3^{\circ} A, B', C; 4^{\circ} A, B, C'. \quad (E')$$

Les quatre angles trièdres (*) correspondants à ces dernières combinaisons ont aussi leurs symétriques; d'où il résulte que la combinaison de trois angles plans A, B, C et de leurs suppléments, produit seize angles trièdres dans lesquels on peut placer un triangle donné T.

G2. La solution que nous venons d'exposer est fondée sur la considération de certains lieux géométriques, que plusieurs géomètres ont nommés *courbes d'erreurs*. Ces courbes ne résultent pas de l'intersection de surfaces définies, par des plans ou par d'autres surfaces connues. On s'écarte moins des procédés ordinaires de la géométrie descriptive, en traitant la seconde partie du problème (art. 59), par la méthode que nous suivions dans nos cours à l'École polytechnique, qui consiste à chercher le sommet d'une pyramide triangulaire dont on connaît la base et les trois angles des arêtes opposés aux côtés de cette base, par l'intersection de trois surfaces annulaires.

PROBLÈME XII.

*Connaissant dans une pyramide triangulaire la base et les angles des arêtes opposés aux côtés de la base, construire le sommet de la pyramide? [Plans-ches *in-folio* (B) et (C).]*

G3. *Solution par l'intersection de trois surfaces annulaires.* Désignons par A, B, C les trois côtés du triangle base de la pyramide, et par a, b, c les

(*) La distinction des deux angles trièdres formés par les trois angles plans A, B, C , ou par leurs suppléments A', B', C' , et la considération des six autres angles trièdres compris entre les mêmes plans, font voir pourquoi la solution algébrique ne dépend (voyez la notice, à la fin du livre II), que d'une équation du quatrième degré, quoique le problème soit susceptible de seize solutions; l'équation finale se rapporte aux quatre combinaisons (E) ou (E').

angles que les arêtes font entre elles, et qui sont respectivement opposés aux trois côtés; on décrit sur chaque côté de la base, sur A par exemple, un cercle qui est divisé par ce côté en deux segmens, dont chacun est capable de l'angle a ou de son supplément. Ce cercle, en tournant autour du côté A, engendre une surface de révolution, dont chaque point jouit de la propriété, que les droites menées de ce point aux extrémités du côté du triangle base de la pyramide, comprennent entre elles un angle égal à l'angle donné ou à son supplément; d'où il suit que la surface de révolution est un *lieu géométrique* du sommet de la pyramide. Mais les cercles décrits sur les côtés B et C comme cordes, et divisés comme le premier cercle, en deux segmens capables des angles b et c et de leurs supplémens, engendrent en tournant autour de ces côtés deux autres surfaces de révolution, qui sont encore les lieux géométriques du point demandé; d'où il suit que lorsque les trois surfaces de révolution se rencontrent, chacun des points communs aux lignes d'intersections peut être pris pour le sommet de la pyramide.

Explication des figures, pl. B et C in-folio.

64. Soit XYZ (pl. B, fig. 1) le triangle base de la pyramide, et a, b, c , (fig. 3) les angles des arêtes respectivement opposés aux côtés XZ, ZY, YX; on décrit sur le côté XZ un cercle dont le segment XFZ est capable de l'angle donné a ; l'autre segment X/Z est capable du supplément de cet angle. Le cercle, en tournant autour de sa corde XZ, engendre la surface dite *annulaire*, qui est un lieu géométrique du sommet de la pyramide. Preuant pour plan horizontal de projection le plan du triangle XYZ, la limite de la projection horizontale de la surface annulaire est formée 1° de deux demi-cercles égaux AFD, BEC, 2° de deux parallèles AB, DC, tangentes à ces demi-cercles, et perpendiculaires au côté XZ. Toutes les lignes de la surface projetées sur le plan horizontal, sont renfermées dans la fig. ABECD.

Les cercles décrits sur les côtés ZY et YX, capables des angles donnés b, c (fig. 3), engendrent deux autres surfaces de révolution, qui sont, comme la première, les lieux géométriques du sommet de la pyramide. Les limites de leurs projections horizontales sont également formées de deux demi-cercles égaux, et de deux parallèles tangentes à ces cercles, qui sont respectivement perpendiculaires aux axes de révolution ZY, YX.

La méthode que nous avons exposée (art. 189, liv. 1^{re}) pour trouver l'intersection de deux surfaces de révolution, dont les axes se rencontrent, s'applique au cas particulier que nous examinons, puisque les axes des trois surfaces de révolution que l'on considère, sont les trois côtés d'un triangle

XYZ (*fig. 1*). On trouvera par cette méthode que les surfaces dont les axes XZ, XY se rencontrent au point X, se pénètrent suivant une ligne dont la projection horizontale est une courbe qu'on distingue (*fig. 1*) par un trait à points ronds, et qui passe par les points X, 1, 2, E, δ , g, 3, 4, X, α' , α , 3, 5, α' , 6, F, β , e, X. Les cinq points X, E, g, F, e sont déterminés par les intersections des cercles générateurs des deux surfaces de révolution; α , α' sont les deux points de contact de la courbe et des parallèles AB, CD perpendiculaires à l'axe XZ. Il y a encore un point α'' de la courbe, voisin de α ; sur la droite NK tangente aux deux demi-cercles décrits sur les droites KL, MN parallèles à l'axe XY, comme diamètres. Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont les projections horizontales des points d'intersection des trois surfaces de révolution.

65. Chaque surface de révolution peut être regardée comme composée de deux nappes, qui sont l'une et l'autre de révolution, et qui ont pour génératrices les deux segments d'un cercle, séparés par une corde de ce cercle.

Pour distinguer la nappe engendrée par le plus petit segment, de la nappe engendrée par le plus grand, nous appellerons la première, *nappe intérieure*, et l'autre *nappe extérieure*. L'intersection de deux surfaces résulte de l'intersection des différentes nappes qui se combinent entre elles. Les nappes extérieures, d'une part, et les nappes intérieures, de l'autre, se coupent suivant une branche de courbe fermée, dont les projections peuvent être engendrées d'un mouvement continu par un point mobile. Il en est de même de la branche de courbe qui résulte de la combinaison de la nappe extérieure ou intérieure de l'une des surfaces, avec la nappe intérieure ou extérieure de l'autre surface. Ces deux combinaisons donnent une seule courbe qu'un point mobile peut suivre sans discontinuité; N'ou il suit que la ligne d'intersection des deux surfaces est composée de deux branches fermées, dont les projections sur un plan UV (*fig. 2*) perpendiculaire à l'un des axes, à XY par exemple, sont séparées : les projections de ces deux branches sur le plan de la base XYZ (*fig. 1*) de la pyramide, se réunissent en une seule courbe.

66. Les deux nappes intérieures (*fig. 1, pl. B*), qui ont pour axes les côtés XZ, XY, se coupent suivant une ligne dont la projection horizontale est la portion de courbe X43 δ EY; or la partie E δ g de cette courbe, qui se termine aux points E, g, est en dehors des limites de la projection horizontale des nappes intérieures; donc cette portion de courbe ne correspond point à une partie réelle de la ligne d'intersection des deux surfaces. Il en est de même de la portion de courbe F β e qu'on trouve en dehors de la limite de la pro-

jection horizontale d'une nappe extérieure de la surface de révolution, qui a pour axe le côté XY; et en effet, projetant la ligne d'intersection des deux surfaces de révolution, qui ont pour axes les droites XY, XZ, sur le plan UV perpendiculaire à l'un de ces axes XY, on obtient (fig. 2) la courbe aux six points 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont le trait ponctué rond est le même que dans la projection horizontale. Cette courbe est composée de deux branches séparées, dont chacune a un nœud. La première branche est $12uv'v'xe'x_1$; la seconde branche est $x_43v'v'x56v'v'$, et il n'y a aucune partie de ces deux branches, qui corresponde aux portions $E'dg$, $F'le$ (fig. 1) de la projection horizontale.

On reconnaîtra de la même manière que les deux surfaces de révolution qui ont pour axes les côtés XY, YZ, se coupent suivant une ligne qui comprend deux parties, dont les projections horizontales sont $Ilxp$, omg' (fig. 1), et qui n'ont pas de projections verticales.

Tout ce qui est relatif à l'intersection de ces deux surfaces est indiqué par un trait long, suivi d'un seul point rond — — — — — et tout ce qui est relatif à l'intersection des deux surfaces de révolution qui ont pour axes les droites YZ, ZX, est indiqué par un trait long, suivi de trois points ronds — — — — — Cette dernière intersection comprend aussi deux parties, dont les projections horizontales sont E_4f , P_4P' (fig. 1, pl. B), et qui n'ont point de projections verticales (fig. 2).

67. Les trois lignes qui résultent de l'intersection des trois surfaces de révolution, considérées deux à deux, se rencontrent aux points marqués des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, sur les projections horizontale et verticale; chacun de ces points en projection horizontale correspond à deux points en projection verticale, qui sont à égales distances du plan UV (fig. 2), ou du plan du triangle donné XYZ (fig. 1). Les six points situés au-dessus du plan UV déterminent six pyramides qui satisfont aux conditions du problème, et les six points situés au-dessous déterminent les six autres pyramides symétriques par rapport aux premières; les douze pyramides ont pour base commune le triangle XYZ.

68. Lorsque des points sont déterminés par les intersections de trois surfaces, la considération de ces trois surfaces n'est pas nécessaire. En examinant la question sous un autre point de vue, les mêmes points peuvent appartenir à trois autres surfaces différentes des premières: le problème dont nous venons de donner la solution graphique en offre un exemple. On connaît dans une pyramide triangulaire la base, et les angles des faces de cette pyramide qui sont opposés aux côtés de la base; il est facile (art. 12) d'en déduire les angles dièdres. Soient A, B, C, les trois côtés de la base: on connaît l'angle

dièdre qui comprend deux de ces trois côtés, par exemple A et B; donc si l'on a deux plans, faisant l'un par rapport à l'autre un angle invariable (*), égal à l'angle dièdre connu, et si l'on fait mouvoir ces deux plans, en les assujettissant à passer constamment par les côtés A et B, la droite intersection des deux plans mobiles engendrera un cône qui aura pour sommet le point d'intersection des deux côtés A et B; or il est évident que la surface de ce cône contient le sommet de la pyramide; donc ce sommet est le point commun à trois faces coniques, qui ont pour sommets les points de rencontre des trois côtés A, B, C de la base de la pyramide.

69. Ayant construit sur les trois côtés du triangle qui sert de base à la pyramide, les cercles générateurs des trois surfaces de révolution, qui, par leur intersection, déterminent (art. 63) le sommet de la pyramide, qu'on se représente la ligne d'intersection de deux quelconques de ces trois surfaces, de celles, par exemple, qui ont pour axes de révolution les deux côtés A et B de la base, C étant le troisième côté. Cette ligne, en tournant autour du troisième côté C, engendre une quatrième surface de révolution, sur laquelle se trouvent les points communs aux trois premières surfaces. Mais deux surfaces de révolution qui ont même axe, et qui se pénètrent, ne peuvent se couper que suivant un cercle; donc la troisième et la quatrième surface de révolution se coupent suivant un cercle qui contient le sommet de la pyramide. Pour trouver un point de ce cercle, il suffit de couper ces deux surfaces par un plan méridien quelconque, et ce plan peut être celui de la base de la pyramide, ou des trois côtés A, B, C de cette base; les points communs aux courbes génératrices contenues dans ce plan, déterminent les cercles communs aux deux surfaces. La courbe génératrice de la troisième surface est le cercle, qui passe par les extrémités du côté C, et dont un segment est capable de l'angle donné opposé à ce côté C. Quant à la courbe génératrice de la quatrième surface, qui est située dans un plan méridien passant par l'axe C, on la construit en remarquant que chaque point de la courbe d'intersection des deux premières surfaces, est le sommet d'une pyramide qui a pour base le triangle formé par les trois côtés A, B, C, et pour arêtes, des cordes qui déterminent sur les cercles générateurs des deux surfaces de révolution des arcs capables des angles a, b opposés aux côtés A et B.

On a vu (art. 67) comment on détermine les sommets des pyramides par

(*) J'ai démontré que lorsque cet angle est droit, le cône, lieu géométrique des intersections successives des deux plans mobiles, est un cône oblique à base circulaire, qui est coupé par des plans perpendiculaires aux côtés de l'angle, suivant des cercles. (Voyez la *Correspondance sur l'École polytechnique*, tome 1^{er}, page 179, n° 6.)

l'intersection de deux courbes à double courbure; la solution que nous venons d'indiquer est préférable, puisque les courbes à double courbure sont remplacées par deux lignes planes dont l'une est formée de deux cercles égaux, qui ont pour corde commune un côté donné de la base de la pyramide. Regardant le rayon de ces cercles comme une quantité indéterminée, on l'augmente ou on le diminue, jusqu'à ce que ces cercles coupent la section méridienne de la quatrième surface de révolution en seize points. Le nombre de solutions ne dépend plus que de ce rayon, ou du troisième angle des arêtes de la pyramide, qui détermine sa longueur; alors le problème proposé est ramené à celui-ci : *Trouver la section méridienne d'une surface de révolution dont on connaît l'axe et une ligne génératrice.* Cette question est résolue sur la planche C *in-folio*, dont on va donner l'explication.

Explication de la planche C in-folio.

70. Ayant pris pour plan de projection celui du triangle XZY, base donnée de la pyramide, on décrit sur les côtés XZ, ZY, des cercles dont les segmens sont capables des angles des arêtes de la pyramide, opposés à ces côtés. Les cercles, en tournant autour des côtés comme axes de révolution, engendrent deux surfaces dont on construit la ligne d'intersection par la méthode exposée (art. 189, liv. 1^{re}); cette ligne est la génératrice de la quatrième surface de révolution, dont l'axe est le troisième côté XY de la base XYZ; elle est formée (art. 65) de deux branches, l'une qui résulte de l'intersection des nappes de surfaces engendrées par les grands segmens XFZ, ZOY, et des nappes engendrées par les petits segmens Xfz, Zoy; l'autre qui résulte de l'intersection des nappes engendrées par un grand segment XFZ et un petit segment Zoy, ou par un grand segment ZOY et un petit segment Xfz.

Les deux branches, en tournant autour de l'axe XY, engendrent deux nappes de la quatrième surface de révolution, dont les sections par le plan du triangle XYZ sont les courbes ACBZ, ou 12345678; et A'C'B'Z, ou 1'2'3'4'5'6'7'8'; ces courbes sont divisées en parties égales par l'axe XY, qui les coupe à angle droit.

La section méridienne de la troisième surface de révolution comprend deux cercles XYGg, XYG'g', dont les segmens sont capables de l'angle des arêtes de la pyramide, opposé au côté XY de la base XYZ. Or ces deux cercles et la section méridienne de la quatrième surface de révolution, se coupent en seize points marqués des chiffres 1.....8 sur la courbe ABCZ, et des chiffres 1'.....8' sur la courbe A'B'C'Z; donc les trois surfaces de révolution qui ont pour axes les trois côtés XZ, ZY, XY se rencontrent en seize points, situés sur des cercles de la troisième surface, qui ont pour diamètres les

droites 1.8, 2.7, 3.6, 4.5, 1'.8', 2'.7', 3'.6', 4'.5', perpendiculaires à l'axe XY de cette surface, et divisées chacune en parties égales par cet axe. Chacun des cercles, tel que celui dont le diamètre est 1.8, contient deux sommets de pyramides, qui se projettent en un seul point α de la droite 1.8, en sorte que les seize sommets se projettent sur le plan du triangle XYZ, en 8 points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$, situés sur les huit diamètres 1.8, 2.7, ..., 4.5'.

71. Nous ferons remarquer qu'on peut trouver la section méridienne ABCZ, A'B'C'Z, de la quatrième surface de révolution, sans qu'on soit obligé de construire les projections de la ligne d'intersection des deux premières surfaces qui ont pour axes de révolution les côtés XZ, ZY du triangle XYZ. En effet, un point quelconque de cette ligne, que je nomme A, après avoir tourné autour des axes XZ, ZY, vient s'appliquer, sur les cercles YOZ, XFZ (pl. C, fig. 1) en deux points α, α' , également distans de l'extrémité Z des côtés XZ, ZY, en sorte que $\alpha'Z = \alpha Z$; or les distances du point A aux extrémités X, Y du côté XY, sont mesurées par les cordes $\alpha'X, \alpha'Y$; donc ce point A, après avoir tourné autour de l'axe XY, s'appliquera au point 1 ou au point 8 de la corde 1.8, commune aux deux cercles décrits des points X et Y comme centres, avec les rayons X α' et Y α' ; les deux points 1 et 8 sont à égale distance de l'axe de révolution XY. On trouve de la même manière d'autres points de la courbe ABCZ, ou A'B'C'Z, section méridienne de la quatrième surface de révolution. Cette section et les cercles générateurs de la troisième surface de révolution étant placés symétriquement par rapport à l'axe commun XY, on voit pourquoi les huit points d'intersections des deux sections méridiennes, marqués 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4' d'un côté de l'axe XY, déterminent les huit autres points placés de l'autre côté; ces points sont placés deux à deux sur des perpendiculaires à l'axe XY, à égales distances de cet axe, et accouplés dans l'ordre suivant :

1.8, 2.7, 3.6, 4.5, 1'.8', 2'.7', 3'.6', 4'.5';

Aux points tels que 1, 8, de l'un de ces couples, correspondent deux sommets de pyramides, dont nous allons construire les projections horizontales et verticales.

Projections horizontales et verticales des seize sommets de la pyramide. (Pl. C.)

72. Les points 1 et 8 étant déterminés par l'intersection de la courbe ABCZ et des deux segments égaux X α' Y, X β Y, le cercle décrit du point X comme centre avec le rayon X1, coupe le segment du cercle XFZ au point α' d'où l'on abaisse la perpendiculaire $\alpha'\alpha$ sur XZ. Cette perpendiculaire rencontre la

droite 18 perpendiculaire à XY, au point α projection horizontale de l'un des points de l'intersection des trois surfaces de révolution. Si du point Y comme centre, avec le rayon Y1 ou Y8, on eût décrit le cercle qui coupe le segment YOZ au point α' , la perpendiculaire $\alpha'\alpha$ à YZ rencontrerait encore la droite 18 au point α , intersection des trois perpendiculaires $\alpha\alpha$, $\alpha'\alpha$, $\alpha''\alpha$ aux trois côtés XY, YZ, XZ du triangle XYZ base de la pyramide.

73. Ayant la projection α de l'un des seize sommets de la pyramide, sur le plan de la base XYZ, pris pour plan de projection horizontal, on en déduira facilement la projection sur un plan vertical $\alpha\nu'$ (fig. 2), dont la trace horizontale ν' est perpendiculaire au côté XY de la base. En effet, le côté XY a pour projection sur ce plan le point x ; décrivant de ce point comme centre un cercle du rayon xk (fig. 2), moitié de 1a8 (fig. 1), la parallèle $\alpha\alpha$ au côté XY coupe ce cercle aux deux points α , (α) (fig. 2), projections verticales de deux sommets qui ont même projection horizontale α (fig. 1). Ainsi le point (α) (fig. 1, α fig. 2) est le sommet d'une pyramide qui a pour base le triangle XYZ, et pour les angles des arêtes opposés aux trois côtés de ce triangle, ceux qu'on a désignés (art. 63) par les lettres a , b , c . Le point $(\alpha, (\alpha))$, (fig. 1 et 2), est le sommet d'une seconde pyramide symétrique de la première.

Les seize sommets ont pour projections verticales (fig. 2) les seize points marqués des lettres α , β , γ , δ , α' , β' , γ' , δ' , (α) , (β) , (γ) , (δ) , (α') , (β') , (γ') , (δ') . Les huit premiers sont au-dessus de l'horizontale ν' ; les huit autres au-dessous de cette horizontale; sont marqués des mêmes lettres en parenthèses. Les deux points à égales distances de l'horizontale ν' , sont situés sur une droite perpendiculaire à l'intersection ν' des plans horizontal et vertical de projection.

74. Les sommets de deux pyramides symétriques étant situés sur une droite perpendiculaire au plan de la base triangulaire XYZ (fig. 1), le point où cette droite coupe le plan de la base, est la projection horizontale des deux sommets; ce qui réduit les projections horizontales des seize sommets aux huit points α , β , γ , δ , α' , β' , γ' , δ' , (fig. 1).

PROBLÈME XIII.

Trouver le centre et le rayon d'une sphère circonscrite à un hyperboloïde de révolution réglé, et tangente à un plan sécant de cet hyperboloïde.

75. *Solution.* L'hyperboloïde de révolution réglé et le plan qui coupe cette surface étant donnés, le centre de la sphère demandée est évidemment sur l'axe de révolution; de plus, ce point a pour lieu géométrique un cône du

second degré. Pour le démontrer, nous remarquerons que la sphère demandée est circonscrite à l'hyperboloïde suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe de révolution, qu'elle a pour tangentes toutes les droites de l'hyperboloïde, et que chacune de ces droites touche la sphère en un point du cercle de contact de cette sphère et de l'hyperboloïde. Il suit de là, 1° que toutes les perpendiculaires abaissées du centre de la sphère sur les droites de l'hyperboloïde et sur le plan sécant, sont égales entre elles comme rayons d'une même sphère; 2° que le centre de la sphère appartient à la surface équidistante du plan sécant, et d'une droite quelconque de l'hyperboloïde de révolution, surface qui jouit de cette propriété, que si de l'un quelconque de ses points on abaisse deux perpendiculaires, l'une sur le plan sécant, l'autre sur une droite déterminée de l'hyperboloïde, ces perpendiculaires, variables pour chaque point de la surface, sont constamment égales entre elles. Cette propriété de la surface la caractérise et la détermine. En effet, soient une droite D et un plan P; considérant la droite D comme l'axe d'un cylindre droit d'un rayon arbitraire R, un plan parallèle au plan P et distant de ce plan du rayon R, coupera le cylindre suivant une ellipse dont chaque point sera à égales distances du plan P et de la droite D. Faisant varier le rayon R du cylindre droit, on obtiendra tant d'ellipses qu'on voudra, et le lieu de ces ellipses sera évidemment la surface équidistante du plan P et de la droite D. Regardant maintenant la droite D comme la droite d'une série de cônes droits, qui sont touchés par le plan P; le sommet de ces cônes sera le point d'intersection du plan P et de la droite D, et l'axe de chaque cône sera déterminé par la droite de contact prise arbitrairement sur le plan P; d'où il suit que les droites, axes des cônes droits correspondans aux droites de contact prises sur le plan P, ont encore pour lieu géométrique la surface équidistante du plan P et de la droite D; d'où il suit que cette surface est composée de droites qui passent par le point d'intersection de la droite D et du plan P; or on a démontré que tous les plans parallèles au plan P coupent cette surface suivant des ellipses; donc la surface équidistante d'une droite et d'un plan, est un cône du second degré, qui a pour sommet le point de rencontre de la droite et du plan.

76. Lorsqu'un plan coupe un hyperboloïde de révolution, il peut arriver (art. 130, livre 1^{er}) que la courbe soit fermée, ou qu'elle s'étende à l'infini; dans ce second cas, il y a au moins une droite de l'hyperboloïde parallèle au plan sécant, et la surface équidistante de cette droite et du plan sécant est un cylindre à base parabolique. On sait que tous les points d'une parabole sont à égales distances d'un point qu'on nomme *foyer* et de la droite qu'on appelle *directrice*. Considérant le foyer comme la projection orthogonale d'une

droite D sur le plan de la parabole, la directrice comme la trace d'un plan P perpendiculaire au même plan de la parabole, et parallèle à la droite D , la surface cylindrique qui a pour section droite la parabole, est équidistante du plan P et de la droite D parallèle à ce plan.

Le centre de la sphère cherchée est sur l'axe de révolution de l'hyperboloïde; il a pour lieu géométrique un cône ou un cylindre du second degré déterminé; par conséquent le centre de la sphère est le point d'intersection du cône ou du cylindre, et de l'axe de révolution de l'hyperboloïde; point que l'on construit géométriquement par la méthode exposée (art. 125 et 179, livre 1^{er}, pages 70 et 106). Le point de contact de la sphère et du plan sécant est un foyer de la section de l'hyperboloïde réglé. (Voyez art. 132, page 73.)

PROBLÈME XIV.

Trouver le centre et le rayon d'une sphère tangente à quatre sphères données de grandeur et de position.

77. Viète, traducteur des ouvrages d'Apollonius de Perge, avait ajouté à la géométrie des anciens, un traité sur le contact des lignes droites et des cercles. Fermât (né en 1590, mort en 1664) a continué ce travail, et c'est à lui qu'on doit la première solution de cette question de géométrie à trois dimensions : *Trouver le centre et le rayon d'une sphère tangente à quatre sphères données*. Les ouvrages de ce géomètre ont été imprimés à Toulouse en 2 volumes in-folio, qui ont paru en 1670 et 1779, sous le titre d'*Opera mathematica*. J'ai traduit son mémoire sur le contact des sphères; on trouve cette traduction à la suite des leçons qui ont été données aux Écoles normales de 1795 par Lagrange et Laplace, et dont le conseil d'instruction de l'École polytechnique a formé les cahiers 7 et 8 de son journal (in-4°, juin 1812).

En 1794 j'avais proposé les questions traitées par Fermat aux élèves de l'École préparatoire des chefs d'études de l'École polytechnique. L'un d'eux, Dupuis, né avec les plus heureuses dispositions pour la géométrie, et qu'une mort prématurée enleva aux sciences, et au corps des ponts et chaussées, résolut le problème de la sphère tangente à quatre autres sphères, par une méthode tout-à-fait différente de celle de Fermat. J'ai recueilli dans le premier volume de la *Correspondance sur l'École polytechnique*, que j'ai publiée en 1804, les propositions qu'il m'avait communiquées de vive voix et sans démonstrations.

Ce travail a été suivi de plusieurs mémoires fort intéressans sur le même sujet. Je citerai d'abord celui de M. Charles Dupin (octobre 1812), que j'ai

inséré dans la *Correspondance* (tome II, page 420). Le seizième cahier du *Journal de l'École polytechnique* contient des recherches fort curieuses sur le contact des sphères, par M. Gaultier, professeur de géométrie au Conservatoire des arts et métiers. (Voyez ce cahier, pages 124-224, juin 1812.)

La première solution analytique complète du problème de la sphère tangente à quatre sphères a été donnée par M. Poisson, qui l'a publiée dans le *Bulletin de la Société philomatique*, cahier de septembre 1812, page 141. (Voyez cette solution à la fin du livre II, notes.)

M. Français, officier du génie et professeur à l'École d'artillerie et du génie de Metz, avait aussi traité la même question par l'analyse. J'ai publié son travail dans le tome II de la *Correspondance* (pages 63 et 409, janvier 1810, et octobre 1812).

En appliquant l'analyse à la solution synthétique que nous avons exposée (art. 69), on trouve, comme par les deux solutions précédentes de MM. Poisson et Français, que la détermination des centres et des rayons des seize sphères qui peuvent toucher quatre sphères données, ne dépend que de la résolution d'équations du second degré. J'ai publié cette troisième solution dans la *Correspondance*, tome II, page 425 (janvier 1813), et dans le dix-septième cahier du *Journal*, in-4°, de l'École polytechnique (janvier 1815), page 129.

Monge a donné dans sa géométrie (première édition, année 1795, art. 36-44) la solution de trois questions relatives au contact de la sphère et du plan. La première consiste à mener par une droite donnée, un plan tangent à la surface d'une sphère; nous l'avons résolue de deux manières (art. 27-31, fig. 1 et 2, pl. 25).

Voici l'énoncé des deux autres questions :

- 1^o Mener par un point donné, un plan tangent à deux sphères, dont les centres et les rayons sont connus ;
- 2^o Mener un plan tangent à trois sphères données de grandeur et de position.

Nous résoudrons ces deux questions, et nous y ajouterons celle-ci :

Étant données trois sphères, déterminer la position du centre d'une quatrième sphère dont le rayon est connu, d'après la condition qu'elle soit tangente aux trois premières sphères?

Du contact de la sphère et du plan.

Première question. Mener par un point donné, un plan tangent à deux sphères?

78. *Solution.* On conçoit les deux cônes circonscrits aux deux sphères données; ils ont leurs sommets sur la droite qui joint les centres de ces

sphères; l'un des sommets est au-delà des centres, et l'autre entre les deux centres.

Par le point donné, on mène des plans tangens à chacun des cônes circonscrits, et il est évident que ces plans sont aussi tangens aux deux sphères données. Ainsi le problème proposé a quatre solutions.

Explication de la fig. 1, pl. 31.

79. Soient A et B les centres des deux sphères données, Aa , Bb leurs rayons. En supposant que ces rayons soient parallèles, la droite ab , qui joint leurs extrémités, rencontre la droite AB des centres au point S, sommet de l'un des cônes circonscrits aux deux sphères; la droite ab' , menée par les extrémités a , b' des rayons parallèles Aa , Bb' , coupe la droite AB au point s , sommet du second cône circonscrit. Il est évident que tout plan tangent aux deux sphères sera aussi tangent à l'un des deux cônes circonscrits à ces sphères, et passera nécessairement par l'un des sommets S, s de ces cônes.

Quelle que soit la position du point donné, on conçoit par ce point et par les centres des deux sphères un plan que l'on peut prendre pour le plan de la fig. 1. Soit D le point donné sur ce plan; les droites DS, Ds qui joignent ce point et les sommets des cônes circonscrits, seront connues; or le plan tangent aux deux sphères données, doit passer par l'une de ces droites; donc le problème proposé est résolu, puisqu'il est ramené au précédent (art. 27), qui consiste à mener par chacune des droites DS, Ds , un plan tangent à l'une des deux sphères données de grandeur et de position.

Deuxième question. — Mener un plan tangent à trois sphères données?

80. Soient A, B, C (fig. 2, pl. 31) les centres des trois sphères données; S et s les sommets des deux cônes circonscrits aux deux premières sphères; S' , s' les sommets des deux cônes circonscrits aux sphères des centres B et C, et enfin S'' , s'' les sommets des deux cônes circonscrits aux sphères des centres A et C, on remarquera d'abord que les six sommets sont placés sur quatre droites dans l'ordre suivant :

$$SS'S'', Ss's'', sS's'', ss's''.$$

En effet, dans les combinaisons des six sommets trois à trois, il faut exclure, 1° celles dans lesquelles entrent S et s , ou S' et s' , ou enfin S'' et s'' , parce que le même plan ne peut pas toucher les deux cônes circonscrits à deux sphères; 2° celles où il entre un des trois sommets intérieurs s , s' , s'' ,

avec deux des trois sommets extérieurs S, S', S'' , parce que le plan qui touche deux quelconques des trois cônes à sommets extérieurs, touche nécessairement le troisième d'un sommet de même nom; 3° enfin la combinaison s, s', s'' , parce que le plan qui touche deux cônes à sommets intérieurs, touche nécessairement un cône à sommet extérieur; donc les combinaisons des sommets trois à trois se réduisent aux quatre droites précédentes.

Maintenant, remarquons que le plan tangent à trois sphères étant aussi tangent à trois des six cônes circonscrits à ces sphères, il contient les sommets de ces trois cônes; mais ces sommets sont encore sur le plan des trois centres des sphères; donc ils sont sur la droite intersection de ces deux plans (*).

Connaissant les quatre droites des sommets des cônes circonscrits, il est évident que le problème proposé consiste à mener par chacune de ces droites, des plans tangents à l'une des trois sphères données; ce qui le ramène au précédent (art. 27); et comme par chaque droite on peut mener deux plans tangents à une sphère, il s'ensuit que trois sphères peuvent être touchées par huit plans.

Du contact des sphères.

81. Lorsque deux sphères se touchent, la distance de leurs centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons; donc si l'on nomme A, B, C les sphères touchées, et a, b, c leurs rayons; T la sphère touchante et t son rayon; le centre de la sphère T est sur l'une des deux sphères a', a'' concentriques à A , et des rayons $t + a, t - a$. Par la même raison, il est sur une des deux sphères b', b'' concentriques à B , des rayons $t + b, t - b$, et enfin sur une des deux sphères c', c'' concentriques à C , qui ont pour rayons $t + c$ et $t - c$; d'où il suit que le centre de la sphère T est le point commun à trois des six sphères $a', a'', b', b'', c', c''$: or, en excluant des combinaisons trinaires de ces six sphères, celles dans lesquelles entrent les sphères a', a'' , ou b', b'' , ou c', c'' , parce que des sphères concentriques ne peuvent pas se couper, ces combinaisons se réduisent à huit, dans l'ordre suivant :

1° $a'b'c'$; 2° $a'b'c''$; 3° $a'b''c'$; 4° $a'b''c''$; 5° $a''b'c'$; 6° $a''b'c''$; 7° $a''b''c'$; 8° $a''b''c''$.

(*) Il suit de cette proposition, que lorsqu'on a sur un plan trois cercles (fig. 2, pl. 31), et qu'on a mené à deux quelconques de ces cercles, les deux couples de tangentes qui se coupent en deux points de la droite menée par leurs centres, les tangentes et les droites des centres se rencontrent en six points, qui sont répartis sur quatre droites, de manière que trois de ces points se trouvent nécessairement sur l'une des quatre droites.

De plus, les trois sphères de l'une quelconque des huit combinaisons se coupent en deux points; d'où il suit qu'il y a en général seize points, dont chacun peut être pris pour le centre d'une sphère T d'un rayon déterminé t , qui touche trois sphères données de grandeur et de position. Lorsque la sphère tangente est d'un rayon infini, c'est-à-dire lorsqu'elle devient un plan, on a vu (art. précédent) que le nombre de plans tangens se réduisait à huit.

82. En faisant varier le rayon de la sphère T tangente aux trois sphères données, le centre de cette sphère prend successivement diverses positions, correspondantes aux valeurs de son rayon; les points de contact de la sphère variable T et des trois sphères fixes, changent continuellement; nous allons démontrer

1° Que les centres des sphères tangentes à trois sphères données, ont pour lieux géométriques, quatre courbes planes du second degré;

2° Que le lieu géométrique des points de contact de l'une quelconque des trois sphères fixes et de la sphère mobile tangente, est un cercle.

De la courbe que parcourt le centre d'une sphère mobile, qui touche constamment trois sphères fixes.

83. Cette courbe jouit de la propriété que si l'on prend un point quelconque sur son contour, les distances de ce point aux centres des sphères fixes, diffèrent entre elles d'une quantité constante et indépendante du rayon de la sphère mobile, en sorte que nommant d, d', d'' , ces distances, les quantités $d - d', d' - d'', d'' - d$ sont constantes, quelle que soit la sphère tangente. En effet, adoptant les dénominations de l'article 81, les distances d, d', d'' peuvent avoir les huit systèmes de valeurs suivantes, qui correspondent aux huit combinaisons (art. 81) des sphères a, a', b, b', c, c' :

$$1^{\circ} d = t + a, \quad d' = t + b, \quad d'' = t + c,$$

$$2^{\circ} d = t + a, \quad d' = t + b, \quad d'' = t - c,$$

$$3^{\circ} d = t + a, \quad d' = t - b, \quad d'' = t + c,$$

$$4^{\circ} d = t + a, \quad d' = t - b, \quad d'' = t - c,$$

$$5^{\circ} d = t - a, \quad d' = t + b, \quad d'' = t + c,$$

$$6^{\circ} d = t - a, \quad d' = t + b, \quad d'' = t - c,$$

$$7^{\circ} d = t - a, \quad d' = t - b, \quad d'' = t + c,$$

$$8^{\circ} d = t - a, \quad d' = t - b, \quad d'' = t - c.$$

Il est évident que pour l'un quelconque de ces systèmes, pour le premier par exemple, les valeurs de $d - d', d' - d'', d'' - d$ sont constantes et égales aux quantités $a - b, b - c, c - a$.

Mais il est à remarquer que le premier et huitième système donnent les mêmes valeurs absolues pour les différences des distances d, d', d'' . La même remarque s'applique aux systèmes 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5; donc les centres de toutes les sphères qui peuvent toucher trois sphères fixes, et qui appartiennent à huit séries différentes, sont distribués sur quatre courbes, telle que pour la première on a :

$$d - d' = a - b, d' - d'' = b - c, d'' - d = c - a;$$

Pour la seconde courbe, on a :

$$d - d' = a - b, d' - d'' = b + c, d'' - d = a + c;$$

Pour la troisième :

$$d - d' = a + b, d' - d'' = b + c, d'' - d = c - a;$$

Pour la quatrième enfin :

$$d - d' = a + b, d' - d'' = b - c, d'' - d = a + c.$$

Nous démontrerons que ces quatre courbes sont planes, et que leurs plans sont perpendiculaires aux quatre droites (art. 80), qui contiennent les six sommets des cônes circonscrits aux trois sphères fixes touchées par la sphère mobile; enfin que chacune d'elles résulte de l'intersection d'un cône droit par un plan.

Dé la courbe formée par les points de contact de chacune des sphères fixes et de la sphère mobile considérée dans toutes ses positions.

84. Parmi les huit séries de sphères qui peuvent toucher trois sphères fixes, prenons-en une à volonté, par exemple la série des sphères qui touchent les sphères fixes extérieurement. Une quelconque des sphères de cette série touche les trois sphères fixes en trois points; nous allons d'abord démontrer que le plan mené par ces trois points passe par la droite qui contient les sommets des trois cônes extérieurs circonscrits aux sphères fixes. Nommons comme précédemment A, B, C les sphères fixes touchées, et T la sphère mobile tangente. Le plan qui passe par le centre de la sphère T et par les centres de deux quelconques des trois sphères A, B, C, de A et B par exemple, coupe les trois sphères A, B, T suivant trois grands cercles, dont l'un appartenant à la sphère T touche les deux grands cercles des sphères A et B.

Soient (fig. 3, pl. 31) X, Y, Z les centres de ces trois cercles, E et F les points de contact de la sphère T avec les sphères A et B; il est évident que

la droite EF qui joint les points de contact E et F, passe par le sommet O du cône extérieur circonscrit aux sphères A et B, puisque les deux droites OE, OH sont dans le rapport constant des deux rayons parallèles XE, YH des sphères A et B; d'où il suit que quel que soit le rayon ZE ou ZF de la sphère T, la droite qui joint les deux points de contact de cette sphère et des sphères A et B, passe constamment par le sommet O du cône extérieur circonscrit à ces sphères A et B.

Par la même raison, la droite qui joint les points de contact de la sphère T et des sphères A et C, passe par le sommet du cône extérieur circonscrit à ces sphères; donc le plan mené par les trois points de contact de la sphère T et des sphères A, B, C, passe par la droite qui contient les trois sommets des cônes extérieurs circonscrits aux sphères A, B, C; ainsi, menant par cette droite un plan quelconque qui coupe les trois sphères A, B, C suivant trois petits cercles, un quatrième cercle tangent à ces trois derniers, appartient à une des sphères T, qui touche les trois sphères A, B, C; d'où il suit que la perpendiculaire au plan de ce quatrième cercle, élevée par le centre de ce cercle, passe par le centre de la sphère T.

85. Désignons les points de contact de la sphère T et des sphères A, B, C par les trois lettres α, β, γ , et par α', β', γ' les points de contact d'une autre sphère T' avec les mêmes sphères A, B, C. On vient de prouver que le plan des trois points α, β, γ , et le plan des trois points α', β', γ' , passent par une même droite, celle qui contient les sommets des cônes extérieurs circonscrits aux sphères A, B, C. Maintenant nous allons démontrer que les six points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, appartiennent à une même sphère.

D'abord en prenant quatre de ces six points dans l'ordre suivant :

$$\alpha\beta\alpha'\beta', \alpha\gamma\alpha'\gamma', \beta\gamma\beta'\gamma',$$

ils sont dans un même plan et sur une même circonférence; car les droites menées par les points α, β , et par les points α', β' , concourent en un même point, qui est le sommet du cône extérieur circonscrit aux sphères A et B; donc le plan mené par ces deux droites coupe les sphères A et B, suivant deux cercles, dont l'un contient les points α, β' , et le second les points β, β' , comme on le voit (fig. 3, pl. 31); or les droites $\alpha\beta', \alpha'\beta$ concourent au même point O, qui représente dans cette figure le sommet du cône circonscrit aux sphères A et B; donc les quatre points $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ appartiennent à une circonférence de cercle, dont le centre K est déterminé; d'où il suit qu'on pourra mener une sphère par les quatre points $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ et un cinquième point γ ; or cette sphère contiendra le sixième point γ' , puisque les quatre points $\alpha, \gamma, \alpha', \gamma'$ ou $\beta, \gamma, \beta', \gamma'$, sont sur une même circonférence; donc les six points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$

appartiennent à une même sphère : le centre et le rayon de cette sphère varient en même temps que les deux sphères T et T' qui touchent les sphères fixes A, B, C .

86. Nommons S la sphère qui passe par les six points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$; elle coupe la sphère A suivant un petit cercle qui passe par les points α, α' , et les deux sphères T et T' suivant deux autres cercles tangens au premier aux points α, α' , puisque ces sphères sont tangentes à la sphère A . Considérons les tangentes communes au petit cercle de la sphère A et aux deux petits cercles de la sphère S ; on a démontré que les plans de ces petits cercles passaient par la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux trois sphères A, B, C ; donc les tangentes à ces cercles passent par la même droite, mais de plus elles sont dans le plan du cercle d'intersection des sphères A et S ; donc elles passent par le point d'intersection de ce plan et de la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux trois sommets A, B, C .

87. En supposant que les sphères A, B, C restent les mêmes, et qu'elles soient touchées par une autre sphère T'' différente de T , les nouveaux points de contact seront $\alpha'', \beta'', \gamma''$. On prouvera de la même manière 1° que les six points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sont situés sur une même sphère S' qui coupera la sphère A suivant un petit cercle, et les sphères T, T' suivant deux autres petits cercles tangens au premier ; 2° que les tangentes communes au petit cercle de la sphère A et aux deux petits cercles des sphères T et T'' se rencontrent en un même point de la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux sphères A, B, C : or la tangente commune au petit cercle de la sphère A et au petit cercle de la sphère T ne change pas de position ; donc elle coupe la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits en un point qui ne varie pas ; donc c'est vers ce point que concourent toutes les tangentes communes aux petits cercles d'intersection de la sphère constante A et des sphères variables $S, S', S'',$ etc..... ; d'où il suit que ce point est le sommet d'un cône droit circonscrit à la sphère A , qui a pour base un cercle dont le plan est perpendiculaire à celui des centres des trois sphères A, B, C .

Ainsi, lorsqu'une sphère variable, qui devient successivement $T, T', T'',$ touche constamment trois sphères fixes A, B, C , les points de contact $\alpha, \alpha', \alpha'',$, de l'une des sphères fixes, de A par exemple, et des sphères $T, T', T'',$, appartiennent à un petit cercle de la sphère A , dont le plan est perpendiculaire à celui qui passe par les centres des trois sphères A, B, C .

88. La ligne de contact de chacune des trois sphères fixes et de la sphère mobile qui les touche étant un cercle, il s'ensuit que la courbe décrite par le

centre de cette sphère mobile, est commune à trois cônes droits qui ont pour sommets les centres des sphères fixes, et pour bases les petits cercles de contact de ces sphères et de la sphère mobile. De plus nous allons démontrer que *cette courbe est plane*.

89. Ayant nommé T et T' la sphère mobile considérée dans deux positions différentes, on a vu 1° que la sphère T touche les trois sphères fixes A, B, C en trois points α, β, γ , et la sphère T' en trois points α', β', γ' ; 2° que les six points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ appartiennent à une même sphère S qui contient les petits cercles menés par les trois points α, β, γ et par les trois points α', β', γ' ; 3° que les plans de ces petits cercles passent, quelles que soient les sphères T et T', par la droite qui contient les sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes.

Cela posé, une perpendiculaire au plan du petit cercle $\alpha\beta\gamma$ (en désignant ainsi le cercle qui passe par les trois points α, β, γ), élevée par le centre de ce cercle, contient évidemment le centre de la sphère T; de même une perpendiculaire au plan du petit cercle $\alpha'\beta'\gamma'$ élevée par son centre, contient le centre de la sphère T'. Ces perpendiculaires sont dans le même plan, puisqu'elles passent par le centre de la sphère S, et ce plan est perpendiculaire à la droite qui joint les sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes. Or le point de rencontre de ces perpendiculaires est d'autant plus près de la courbe que décrit le centre de la sphère mobile, que les deux sphères consécutives T et T' diffèrent moins entre elles; donc, lorsque ces sphères croissent par degrés insensibles, l'intersection successive des perpendiculaires aux plans des cercles $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma', \alpha''\beta''\gamma'',$ etc., menées par les centres de ces cercles, forme la courbe que décrit le centre de la sphère mobile; donc cette courbe a pour tangentes ces perpendiculaires. Mais une ligne dont toutes les tangentes sont situées dans des plans perpendiculaires à une même droite, est nécessairement plane; donc la courbe décrite par le centre d'une sphère mobile qui touche constamment trois sphères fixes, est plane. Ayant démontré que cette courbe est commune à trois cônes droits dont elle est l'intersection, on doit conclure que ces cônes se coupent suivant une seule et même ligne plane. Ainsi la courbe décrite par le centre d'une sphère mobile qui touche constamment trois sphères fixes, est une section conique, dont le plan est perpendiculaire à une droite qui contient le sommet des cônes circonscrits aux sphères fixes.

90. On a prouvé (art. 83) que les centres des huit séries de sphères qui peuvent toucher trois sphères données, étaient distribués sur quatre courbes différentes; il suit de ce qui précède que ces courbes sont des sections coniques situées dans des plans perpendiculaires aux quatre droites qui contiennent les sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes.

A chaque courbe, lieu des centres de la sphère mobile, correspond un cercle qui est aussi le lieu des points de contact d'une sphère fixe avec cette sphère mobile ; donc toutes les sphères qui peuvent toucher trois sphères fixes, touchent chacune d'elles en des points qui sont distribués sur quatre petits cercles. Chacun de ces petits cercles étant (art. 87) la base d'un cône droit qui a son sommet sur l'une des quatre droites menées par les six sommets des cônes circonscrits aux sphères fixes, on propose la question suivante :

Connaissant les rayons et les centres de trois sphères, déterminer 1° la position des plans des quatre courbes, lieux des centres de toutes les sphères qui peuvent toucher les trois sphères données ; 2° les quatre petits cercles lieux des points de contact de chacune des sphères données, avec la sphère mobile qui, dans toutes ses positions, est tangente aux sphères fixes.

91. *Solution.* Ayant mené par les centres des trois sphères données un plan qui coupe ces sphères suivant trois grands cercles, on tracera dans ce plan les quatre droites sur lesquelles sont distribués les sommets des six cônes circonscrits aux sphères ; à chacune de ces droites correspond (art. 87) une série de sphères tangentes aux trois sphères données. Après avoir déterminé le centre d'une quelconque des sphères comprises dans une série, on mènera par ce centre, et perpendiculairement à la droite correspondante à cette série, un plan qui sera un des plans demandés. On construit le centre d'une sphère comprise dans les quatre séries des sphères correspondantes aux droites qui unissent les sommets des cônes circonscrits, en observant que le rayon de cette sphère est pris arbitrairement, et que son centre est l'intersection de trois sphères dont les rayons et les centres sont connus.

Soient, comme dans les articles précédents, A, B, C, les trois sphères touchées par une quatrième sphère T, dont le centre est dans un plan perpendiculaire à l'une des droites qui contiennent les sommets des cônes circonscrits aux trois sphères A, B, C, et nommons D cette droite.

Par les points où la sphère T touche les trois sphères A, B, C, on mènera trois plans tangens à cette sphère T. Le plan qui touche les sphères T et A coupera la droite D en un point que l'on considérera comme le sommet d'un cône droit circonscrit à la sphère A. Ce cône touchera la sphère A suivant un petit cercle qui sera le lieu des points de contact de cette sphère A, et de toutes les sphères (comprises dans une même série) qui touchent à la fois les trois sphères A, B, C. La droite D sera coupée en deux autres points par les plans qui touchent, l'un les sphères T et B, l'autre les sphères T et C. Ces

points seront les sommets des deux autres cônes droits circonscrits aux sphères B et C, les petits cercles de contact des cônes et des sphères, contiennent les points de contact des sphères A, B, C, et de la sphère mobile T qui les touche.

On raisonnera de la même manière pour une autre sphère T' tangente aux trois sphères A, B, C, dont le centre serait dans un plan perpendiculaire à une autre droite D', contenant trois sommets de cônes circonscrits aux sphères A, B, C.

La question précédente renferme la suivante, comme cas particulier.

Étant donnés trois cercles dans un plan, trouver un quatrième cercle tangent aux trois premiers ()?*

92. *Solution.* On considérera les trois cercles donnés comme les grands cercles de trois sphères, et la question proposée sera la même que celle-ci :

Trouver parmi les sphères tangentes à trois sphères données, celles qui

(*) Ce problème, traité algébriquement par Newton et Euler, a été résolu fort élégamment par MM. Cauchy et Poncelet, à l'époque où ils étaient élèves de l'École polytechnique. J'ai publié leurs solutions dans la *Correspondance*, tome I^{er}, page 193, juillet 1806; et tome II, p. 271, janvier 1811. (Voy. aussi les *Annales de mathématique* de M. Gergonne, avril 1817, tome VII, page 289.)

On a encore traité cette question, dans l'hypothèse où les trois cercles sont donnés sur une sphère. M. Carnot l'a résolue par l'algèbre, dans sa *Géométrie de position* (1 vol. in-4, année 1803, page 415). M. Olivier, ancien officier d'artillerie, m'avait communiqué une solution synthétique de ce problème, que j'ai publiée dans la *Correspondance de l'École polytechnique* (tome III, page 10, année 1814), et qui se déduit des principes que nous avons exposés.

Soit A (fig. 4, pl. 31) le centre de la sphère sur laquelle on donne trois cercles que je désigne par les lettres X, Y, Z; le plan mené par ce centre et par les centres des deux cercles donnés X et Y, coupe la sphère suivant un grand cercle MNmn, et les plans des cercles X, Y suivant des cordes MN, mn du grand cercle, qui sont aussi les diamètres des petits cercles X et Y. (Voyez art. 204, liv. I^{er}.) On a démontré (même article) que par ces deux petits cercles on peut faire passer deux cônes obliques, qui ont pour sommets les points de concours S et s des côtés et des diagonales du quadrilatère MNmn.

En substituant le troisième cercle donné Z au second Y, et le combinant avec le premier cercle X, on forme deux autres cônes obliques dont les sommets S', s' sont situés hors du plan de la fig. 4. La combinaison des deux cercles Y et Z donne encore deux cônes, dont les sommets S'', s'' sont aussi hors du plan de la fig. 4.

Cela posé, la solution de M. Olivier est fondée sur cette considération, que le plan d'un quatrième cercle qui touche les trois cercles donnés X, Y, Z, est tangent à trois des six cônes qui passent par ces cercles, et dont les sommets sont situés deux à deux sur les trois droites Ss, S's', S's''. Parmi les cercles qui peuvent toucher les trois cercles donnés, considérons celui qui est en dehors de ces trois cercles, et qui les touche en trois points. Les tangentes menées par les

ont leurs centres dans le même plan que celui des centres des trois sphères données?

Pour résoudre cette dernière question, on construira (problème précédent), sur les trois sphères, les quatre petits cercles lieux des points de contact de ces sphères et de toutes les sphères qui peuvent les toucher en même temps; les huit points communs à ces petits cercles et aux grands cercles donnés des sphères, sont ceux par lesquels doivent passer les cercles tangents aux cercles donnés. Il suit de cette construction que le problème proposé a huit solutions, c'est-à-dire qu'étant donnés trois cercles, ils peuvent être touchés par un quatrième de huit manières différentes.

Connaissant les points de contact des trois cercles donnés avec les cercles qui peuvent les toucher, il sera facile de distinguer ceux de ces points qui appartiennent au même cercle tangent; mais pour éviter toute difficulté dans le choix de ces points, il conviendra de trouver sur le plan des trois cercles donnés, les traces des plans qui contiennent les centres des sphères tangentes aux trois sphères de mêmes centres et de mêmes rayons que les cercles donnés. Chacune de ces traces contiendra deux des centres des cercles cherchés. A chaque trace correspond un cône droit dont le sommet est (art. 87) sur l'une des droites lieux des sommets des cônes circonscrits aux sphères qui ont

points de contact, sont les côtés d'un triangle dont le plan ne diffère pas de celui du cercle tangent : or, le plan des tangentes aux cercles X et Y, est évidemment tangent au cône qui passe par ces cercles, et dont le sommet est en S; de même le plan des tangentes aux cercles X et Z est tangent au cône qui passe par ces cercles, et dont le sommet est en S'; donc le plan tangent au cône du sommet S, mené par la droite SS', est le plan d'un cercle tangent aux trois cercles donnés X, Y, Z.

La droite SS' prolongée, rencontre le plan du cercle X qui a pour diamètre la corde MN en un point. Menant par ce point deux tangentes au cercle X, et par les tangentes deux plans tangents au cône du sommet S, ces deux plans se couperont suivant la droite SS'; et comme chacun de ces plans est aussi tangent au cône du sommet S', leur droite d'intersection SS' contiendra les sommets S, S', S'' des trois cônes qui passent par les cercles donnés X, Y, Z.

On démontrera, de la même manière, que les autres sommets sont situés trois à trois dans l'ordre suivant SS'S'', SS'S', SS'S''; d'où il suit 1° que les six sommets S, S', S'', S, S', S'' sont dans un seul et même plan; 2° que ce plan, qui est déterminé par deux quelconques des trois droites SS', SS', SS'', coupe la perpendiculaire Ax à la plan du cercle X, élevée sur le milieu x de la corde MN, en un point t qui ne varie pas, quels que soient les cercles donnés Y et Z, pourvu que le premier cercle X du diamètre MN ne change ni de grandeur ni de position.

Les plans tangents aux six cônes qui passent par les trois cercles donnés X, Y, Z, se coupent deux à deux suivant les quatre droites SS'S'', SS'S', SS'S' : or, par chacune de ces droites, on peut mener deux plans tangents à l'un des six cônes; donc il y a en général huit plans qui coupent la sphère donnée, suivant un cercle tangent aux trois cercles donnés sur cette sphère.

pour grands cercles les cercles donnés. Par le sommet du cône droit, on mène deux tangentes à l'un des trois grands cercles donnés, et chaque point de contact de ces tangentes est aussi celui où le grand cercle est touché par un quatrième cercle qui toucherait les trois cercles donnés; donc les deux rayons de ce grand cercle, menés par les points de contact, couperont la trace du plan qui contient les centres des sphères tangentes, en deux points qui seront les centres de deux cercles tangents aux trois cercles donnés.

SOLUTION DU PROBLÈME XIII. (Page 183).

Mener une sphère tangente à quatre sphères données.

93. *Solution.* Soient A, B, C, D les quatre sphères données, et S la cinquième sphère qui les touche. Considérant d'abord trois des quatre sphères données, par exemple A, B, C, on construira 1° les plans des quatre courbes qui contiennent les centres de toutes les sphères qui peuvent toucher les trois premières sphères données; 2° on déterminera sur chacune des trois sphères A, B, C, les quatre petits cercles lieux des points de contact de ces sphères avec celles qui leur sont tangentes. On substituera ensuite la sphère D à la sphère C, et l'on obtiendra de la même manière, sur chacune des trois sphères A, B, D, les quatre petits cercles lieux des points de contact de ces sphères avec celles qui peuvent les toucher en même temps, ainsi que les quatre plans lieux des centres de ces mêmes sphères. Les quatre petits cercles lieux des points de contact de la sphère A, par exemple, et des sphères tangentes aux trois sphères A, B, C, et les quatre petits cercles lieux des points de contact de la même sphère A et des sphères tangentes aux trois sphères A, B, D, se coupent en plusieurs points, parmi lesquels se trouvent nécessairement les points de contact de la sphère A et d'une sphère S tangente aux quatre sphères données A, B, C, D. Pour trouver le nombre et la position de ces derniers points, il faut remarquer que parmi les points d'intersection des huit petits cercles de la sphère A, on ne doit tenir compte que de ceux qui résultent de l'intersection des petits cercles qui proviennent de combinaisons semblables entre les sphères A, B, C ou A, B, D.

Avant d'expliquer ce que nous entendons par combinaisons *semblables* et *dissemblables*, désignons de la manière suivante les quatre petits cercles lieux des points de contact de la sphère A et des sphères qui touchent les trois sphères A, B, C :

$$(E) \quad A'B'C', A'B'C'', A'B'C''', A'B'C''''.$$

Le premier petit cercle A'B'C' est le lieu géométrique des points de contact

de la sphère A et de deux sphères tangentes aux trois sphères A, B, C, les unes tangentes toutes extérieurement, les autres toutes intérieurement : c'est pourquoi on doit lire cette notation $A'B'C$ de deux manières, ou $A'B'C$, ou A,B,C ; elle se rapporte à un seul cercle de la sphère A, qui est le lieu géométrique des points de contact de cette sphère et des sphères des deux séries, tangentes extérieurement ou intérieurement. Le second petit cercle $A'B'C$ (lisez $A'B'C$, ou A,B,C) est le lieu des points de contact de la sphère A et des sphères qui touchent extérieurement les sphères A et B, et intérieurement la sphère C, et des sphères qui touchent A et B intérieurement et C extérieurement. Le troisième cercle $A'B'C$ est le lieu des points de contact de la sphère A et de deux séries de sphères, les unes qui touchent les sphères A et C extérieurement et la sphère B intérieurement, les autres qui touchent les sphères A et C intérieurement et la sphère B extérieurement; enfin le quatrième cercle $A'B'C$ est le lieu des points de contact de la sphère A et de deux séries de sphères, les unes qui touchent les sphères B et C extérieurement et la sphère A intérieurement, les autres qui touchent les sphères B et C intérieurement, et la sphère A extérieurement.

Les quatre petits cercles lieux des points de contact de la sphère A et des sphères qui touchent les trois sphères A, B, D, seront désignés, d'après la même notation, de la manière suivante :

$$(E) \quad A'B'D, A'B,D, A,B,D, A,B,D.$$

Des huit cercles (E), (E), les notations de ceux qui résultent de combinaisons pareilles entre les sphères A, B, C et les sphères A, B, D, comprennent les lettres A et B avec les mêmes exposants; ainsi les petits cercles $A'B'C$, $A'B,D$ résultent de combinaisons semblables; les petits cercles $A'B,C$, $A'B,D$ résultent de combinaisons dissimilaires, et parmi les sphères tangentes aux quatre sphères A, B, C, D, il n'y en a aucune qui puisse toucher la sphère A en un point de l'intersection de ces deux derniers cercles. En effet, par ce point on ne pourrait mener qu'une sphère qui toucherait les deux sphères A, B intérieurement ou extérieurement, puisqu'il appartient au cercle $A'B,C$; mais par ce même point on pourrait mener une sphère qui toucherait les deux sphères A et B, l'une intérieurement, l'autre extérieurement, puisqu'il appartient au cercle $A'B,D$; or lorsqu'une sphère touche deux sphères A et B, les contacts ne peuvent pas être en même temps tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs, et être l'un extérieur, l'autre intérieur; donc il n'y a aucune sphère tangente aux quatre sphères A, B, C, D qui puisse toucher la sphère A au point d'intersection des deux cercles de combinaisons dissimilaires $A'B,C$, $A'B,D$.

En raisonnant de la même manière sur deux autres petits cercles de combinaisons dissemblables, situés sur la sphère A, on conclura qu'une sphère tangente aux quatre sphères A, B, C, D ne peut toucher la sphère A qu'aux points communs à l'un quelconque des quatre cercles (E), et à deux des cercles (E'); d'où il suit qu'il y a en général seize points de contact de l'une quelconque des quatre sphères A, B, C, D, et d'une cinquième sphère qui les touche toutes quatre en même temps.

Ayant déterminé sur l'un des cercles (E) de la sphère A, les quatre points de contact de cette sphère A et de la sphère qui touche les quatre sphères A, B, C, D, on mènera par ces points les rayons de la sphère A, et ces quatre rayons prolongés contiendront les centres de quatre sphères tangentes aux sphères A, B, C, D. De plus, ces centres seront sur l'un des quatre plans (art. 91) qui contiennent les centres des sphères tangentes aux trois sphères A, B, C, et qui correspondent aux quatre cercles (E); donc les centres et les rayons de quatre sphères tangentes aux quatre sphères A, B, C, D, seront déterminés. On construira de la même manière les centres et les rayons des douze autres sphères tangentes aux mêmes sphères A, B, C, D. (Voyez la Correspondance sur l'École polytechnique. Juillet, 1812, tom. II, pag. 337.)

Résumé des propositions relatives au contact des sphères et des plans, et des sphères entre elles (art. 77-93).

- 1° Un plan peut toucher trois sphères données de huit manières différentes ;
- 2° Une sphère d'un rayon déterminé peut toucher trois sphères données de seize manières différentes ;
- 3° Lorsqu'une sphère variable de rayon se meut en touchant constamment trois sphères fixes données de grandeur et de position, la courbe formée sur chacune des sphères fixes par la suite de ses points de contact avec la sphère mobile, est un cercle, et la ligne que le centre de cette dernière sphère parcourt, est une section conique ;
- 4° Trois cercles donnés dans un plan peuvent être touchés par un quatrième cercle de huit manières différentes ;
- 5° Quatre sphères peuvent être touchées par une cinquième sphère de seize manières différentes.

De l'aire d'un triangle sphérique, ou de la surface de la sphère, comprise entre trois arcs de grands cercles.

94. La surface entière de la sphère est équivalente à l'aire de quatre grands cercles de cette sphère. Prenant le rayon de la sphère pour unité, et π pour

la circonférence de l'un de ses grands cercles, 2π (ou huit angles droits) sera l'aire totale de la sphère. Qu'on imagine cette sphère découpée en fuseaux par des plans passant par un diamètre de cette sphère : deux quelconques de ces plans comprennent entre eux un fuseau, dont l'aire dépend évidemment de l'angle compris entre ces deux plans. Supposons cet angle mesuré par un arc A du grand cercle π . Les aires de la sphère entière et du fuseau sont dans le rapport de π à A . On a donc la proportion :

$$\pi : A :: 2\pi \text{ surface entière de la sphère} : \text{aire du fuseau};$$

d'où il suit que $2A$ est l'expression de l'aire de ce fuseau, le rayon de la sphère étant l'unité.

Cela posé, considérons le triangle sphérique ABC (*pl. 31, fig. 5*), dont un côté AB est un arc du grand cercle $ABB'A'$ qui partage la sphère en deux parties égales, l'une au-dessus, et l'autre au-dessous du plan de ce cercle. Soient ACA' , BCB' , les deux autres grands cercles. Les plans de ces trois grands cercles comprennent entre eux trois fuseaux. En comparant les aires de ces fuseaux à l'aire de l'hémisphère supérieure, on voit que cette hémisphère est composée 1° du fuseau $AA'BC$ compris entre les deux plans qui se coupent suivant le diamètre AA' ; 2° du fuseau $BB'AC$ diminué du triangle sphérique ABC ; 3° du fuseau $CC'A'B'$ diminué du triangle sphérique $A'B'C'$, dont l'aire est égale et opposée à celle du triangle ABC : or A , B , C étant les angles donnés du triangle sphérique, les aires des trois fuseaux $AA'BC$, $BB'AC$, $CC'A'B'$ sont respectivement $2A$, $2B$, $2C$. Donc nommant T l'aire du triangle sphérique donné, et se rappelant que π est l'aire de l'hémisphère, on a l'équation suivante :

$$\pi = 2A + (2B - T) + (2C - T);$$

d'où l'on tire :

$$T = A + B + C - \frac{\pi}{2};$$

c'est-à-dire que l'aire d'un triangle sphérique tracé sur une sphère dont le rayon est l'unité, est l'excès de ses trois angles, sur deux angles droits, la surface de la sphère étant huit angles droits.

Tous ceux qui ont étudié la géométrie de M. Legendre connaissent ce théorème remarquable qu'il a donné pour réduire la résolution des triangles sphériques très-petits, à celle des triangles rectilignes :

« Étant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux angles droits, les angles ainsi diminués pourront être pris pour les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé. »

CHAPITRE II.

OMBRES ET PERSPECTIVE.

§ 1^{er}. — *Introduction.*

95. La théorie géométrique des ombres et de la perspective est fondée sur plusieurs hypothèses que les physiciens ont admises, pour expliquer les phénomènes de la vision. On sait que tous les corps sont ou lumineux, ou opaques, ou transparents; un point quelconque d'un corps lumineux est considéré comme le centre d'une infinité de rayons blancs, qui se propagent en lignes droites dans tous les sens, hors du corps lumineux. Ces rayons ne conservent leur blancheur et leur direction primitive, que lorsqu'ils traversent un milieu homogène. La lumière se comporte comme un fluide composé de molécules parfaitement élastiques; elle est soumise aux forces attractives ou répulsives des molécules des corps qu'elle traverse, ou dont elle s'approche à des distances imperceptibles. La loi suivant laquelle ces attractions moléculaires s'exercent, détermine le mouvement de chaque rayon lumineux dans des milieux donnés, ou vers les bords des corps éclairés.

96. On suppose, dans la théorie géométrique des ombres, que la lumière se meut toujours en ligne droite, soit au contact des corps dont elle rase les bords, soit dans le milieu qu'elle traverse et que l'on regarde comme homogène. On fait abstraction, dans cette théorie, des forces qui produisent les phénomènes de l'inflexion, de la réfraction, et de la décomposition de la lumière blanche en rayons colorés. On admet que chaque point de la surface visible d'un corps non lumineux par lui-même, devient le centre d'une infinité de rayons réfléchis, qui se propagent en faisceaux comme les rayons directs d'un corps lumineux; ce point est visible dans la direction de l'axe du faisceau dirigé vers l'œil du spectateur.

On suppose encore, dans la théorie géométrique de la perspective, que l'œil est un point unique vers lequel viennent concourir tous les rayons de lumière, qui portent sur la rétine l'image des objets visibles.

97. Ces hypothèses admises, nous ne considérerons d'abord dans l'espace qu'un seul corps lumineux, et des points pris en dehors de ce corps. Chaque

point du corps lumineux sera le centre d'une infinité de rayons, qui se propageront en lignes droites dans tous les sens, en dehors du plan tangent à la surface du corps lumineux mené par ce point.

Chaque point pris en dehors du corps lumineux sera éclairé, et la quantité de lumière qu'il recevra sera déterminée par le cône qui a ce point pour sommet, et qui est circonscrit au corps lumineux; tous ces points seront *totale-ment* éclairés; mais leurs clartés seront inégales, puisqu'elles ont pour mesures les volumes variables des cônes lumineux compris entre les points éclairés, et les lignes de contact du corps lumineux et des cônes qui l'enveloppent.

98. Plaçons maintenant en dehors du corps lumineux, un corps opaque, et considérons un point quelconque de l'espace, comme le sommet de deux cônes solides, dont les surfaces sont circonscrites, l'une à la surface du corps lumineux, l'autre à celle du corps opaque. Lorsque ces deux cônes n'ont de commun que leur sommet, le point de l'espace est *totale-ment* éclairé. Lorsque le premier cône est en totalité dans l'intérieur du second, le point est *totale-ment* privé de lumière; mais si le second cône est en totalité ou *partielle-ment* dans le premier, le point est privé d'une portion de la lumière qu'il aurait reçue, si le corps opaque n'existait pas; d'où il suit que, dans l'hypothèse d'un espace qui ne contient qu'un seul corps lumineux, et un seul corps opaque, cet espace se divise en trois autres espaces: le premier *totale-ment* éclairé, qui est le *jour*; le second *totale-ment* privé de lumière, qu'on nomme l'*ombre*; enfin le troisième *partielle-ment* éclairé, qu'on appelle *pénombre*. La surface du corps opaque se divise, comme l'espace, en trois surfaces qui appartiennent, la première au *jour*, la seconde à l'*ombre*, la troisième à la *pénombre*. Pour le démontrer, on mènera par un point quelconque de la surface du corps opaque, un plan tangent à cette surface. En considérant ce plan comme une plaque mince opaque, ou il interceptera les rayons de lumière qui, partant du corps lumineux, sont dirigés vers le corps opaque, ou placé au-delà de ce second corps, il n'interceptera aucun des rayons qui l'éclairent; ce qui présente plusieurs cas que nous allons examiner successivement.

1° Le plan tangent à la surface du corps opaque, ne rencontre pas la surface du corps lumineux, et il est placé entre les surfaces de ces deux corps. Dans ce cas, le point de contact est *totale-ment* éclairé; il reçoit toute la lumière comprise dans le cône qui a ce point pour sommet, et qui est circonscrit à la surface du corps lumineux.

2° Le plan tangent à la surface du corps opaque ne rencontre pas la surface du corps lumineux, mais il est placé de manière que le corps opaque et le corps lumineux sont du même côté par rapport à ce plan. Dans ce cas, le point de contact sur le corps opaque est *totale-ment* privé de lumière. Le corps

opaque intercepte toute la lumière comprise dans le cône qui aurait ce point pour sommet, et qui serait circonscrit au corps lumineux.

3° Le plan tangent à la surface du corps opaque rencontre la surface du corps lumineux, et la coupe suivant une ligne courbe; dans ce cas, le point de contact n'est que partiellement éclairé, car le cône dont ce point est le sommet, et qui est circonscrit au corps lumineux, touche la surface de ce corps, suivant une autre ligne courbe; la portion de cette surface comprise entre la courbe de contact et la ligne d'intersection par le plan tangent au corps opaque, détermine la quantité de lumière qui peut arriver du corps lumineux au point de contact du corps opaque : or cette lumière n'occupe qu'une portion du cône qui a pour sommet le point de contact, et qui est circonscrit au corps lumineux; donc le point de contact n'est que partiellement éclairé.

4° Le plan tangent à la surface du corps opaque est aussi tangent à la surface du corps lumineux. En supposant que le plan ait une épaisseur, les deux points de contact sont du même côté de ce plan ou de côtés différens. Considérons d'abord le premier cas; alors le point de contact est éclairé par un seul rayon de lumière; le cône lumineux qui a ce point pour sommet, se réduit à la ligne droite menée par les deux points de contact. Si l'on conçoit la surface développable engendrée par un plan mobile, qui touche constamment du même côté de ce plan les deux surfaces du corps opaque et du corps lumineux, chaque point de la ligne de contact de cette surface développable et du corps opaque ne sera de même éclairé que par un seul rayon de lumière.

5° Le plan tangent à la surface du corps opaque est aussi tangent à la surface du corps lumineux; mais les deux points de contact sont placés de côtés différens, par rapport au plan tangent qui aurait une épaisseur sensible. Dans ce cas, le point de contact est totalement éclairé, car il peut recevoir toute la lumière comprise dans le cône qui a ce point pour sommet, et qui est circonscrit au corps lumineux. Le plan mobile qui, dans chaque position, est tangent aux deux surfaces du corps opaque et du corps lumineux, de manière que les deux points de contact soient sur les deux faces opposées du plan tangent, engendre une autre nappe de la surface développable du cas précédent, et tous les points de la courbe de contact de cette nappe et du corps opaque sont totalement éclairés. Pour distinguer ces deux nappes, qui sont les limites l'une de l'ombre, et l'autre de la pénombre, nous appellerons la première *nappe de l'ombre*, et la seconde, *nappe de la pénombre*. La partie de la surface du corps opaque qui appartient à la pénombre est comprise entre deux courbes; chaque point de la première courbe n'est éclairé que par un seul rayon de lumière, et chaque point de la seconde reçoit toute la lumière com-

prise dans le cône qui a ce point pour sommet, et qui est circonscrit au corps lumineux.

99. Pour éclaircir cette théorie par un exemple, on peut supposer que le corps lumineux et le corps opaque sont des sphères; dans ce cas, les deux nappes de la surface développable circonscrite aux deux sphères se séparent, et chacune d'elles est une surface conique droite. La nappe de l'ombre devient un cône droit, dont le sommet, situé sur la ligne qui joint les centres des deux sphères, est au-delà de ces sphères. La nappe de la pénombre est un second cône droit, dont le sommet est encore situé sur la ligne des centres, mais entre les sphères.

Les lignes qui séparent sur la sphère opaque la zone éclairée de la pénombre, et la pénombre de l'ombre, sont deux petits cercles de cette sphère, situés dans des plans perpendiculaires à la droite qui joint les centres des deux sphères.

100. Avant déterminé la surface de l'ombre et de la pénombre, dans l'hypothèse d'un seul corps lumineux, qui éclaire un seul corps opaque, ajoutons-y un second corps opaque, qui aura, comme le premier, son ombre et sa pénombre; la partie éclairée du second corps opaque réfléchira la lumière qu'il reçoit du corps lumineux; alors les deux corps opaques se comporteront l'un à l'égard de l'autre, comme le corps lumineux par rapport à chacun d'eux. Un point pris dans l'ombre de l'un des corps opaques, sera en partie éclairé par l'autre corps opaque. Dans cette hypothèse, il n'y aura plus d'ombre totale. Les points de l'espace seront néanmoins très-inégalement éclairés; c'est cette inégalité de clarté qui produit ce qu'on appelle ordinairement l'ombre d'un corps. L'ombre prise dans ce sens, est un espace moins éclairé qu'un autre espace contigu.

Ainsi lorsque des objets sont éclairés par le soleil, l'ombre de ces objets n'est pas un espace totalement privé de lumière.

L'atmosphère, et tous les corps qui environnent les objets éclairés, réfléchissent la lumière dans tous les sens, et toutes les parties de l'espace reçoivent plus ou moins de la lumière réfléchie. On fait voir dans les cours d'optique le contraste d'un espace éclairé et d'une ombre totale. L'observateur est dans l'intérieur d'une chambre obscure, dont les parois sont peintes en noir. Une ouverture à circulaire faite à l'une de ces parois permet à la lumière solaire d'y pénétrer: on reçoit cette lumière sur un tableau blanc vertical. La partie de ce tableau frappée par la lumière, est parfaitement éclairée; le reste du tableau est complètement privé de lumière sensible. L'image blanche du soleil se détache sur un fond noir; d'où résulte un contraste qui nous trompe sur l'intensité de la couleur. Une disposition naturelle de l'organe de

la vue nous porte à juger le blanc qui est en contact avec le noir, plus blanc qu'il n'est réellement, et réciproquement le noir voisin du blanc, plus noir qu'il n'est effectivement.

101. Lorsque le foyer de lumière cesse d'être un corps étendu aux trois dimensions, et qu'il se réduit à une ligne courbe lumineuse, un point quelconque de l'espace qui est totalement éclairé, reçoit le cône de lumière dont ce point est le sommet, et qui a pour base la courbe lumineuse. Interceptant par un corps opaque une partie de la lumière dirigée vers un point, ce point est dans la partie de l'espace que nous avons nommée (art. 98) *pénombre*. Il y aurait encore *pénombre*, dans l'hypothèse où la courbe lumineuse serait plane. Un point situé dans le plan de cette courbe pourrait ne recevoir qu'une partie de la lumière comprise dans l'angle dont le point serait le sommet, et qui aurait pour côtés, des tangentes à la courbe plane lumineuse; mais si l'on suppose le foyer de lumière réduit à un point, alors un autre point quelconque de l'espace n'est éclairé que par un seul rayon de lumière dirigé suivant la droite qui joint ces deux points; d'où il résulte que dans cette dernière hypothèse, il n'y a aucun point de l'espace qui soit *partiellement* éclairé, autrement, qu'il n'y a pas de *pénombre possible*. La surface développable de l'ombre devient une surface conique qui a pour sommet le point lumineux, et qui est circonscrite à la surface du corps opaque. Lorsque le point lumineux est à une distance infinie du corps opaque, la surface conique de l'ombre se transforme en une surface cylindrique, également circonscrite au corps opaque, et dont la génératrice est parallèle aux rayons de lumière.

Conclusions.

102. L'ombre et la pénombre d'un corps opaque ont pour limites les deux nappes de la surface développable, engendrée par un plan mobile constamment tangent à la surface du corps opaque et à celle du corps lumineux. Ces nappes tangentes à la surface du corps opaque divisent cette surface en trois zones: la première de ces zones est totalement éclairée, la seconde totalement dans l'ombre; la troisième est partiellement éclairée, ou dans la pénombre. Cette dernière zone est comprise entre les deux courbes de contact de la surface du corps opaque et des deux nappes de l'ombre et de la pénombre. Un point quelconque de la première courbe ne reçoit du corps lumineux qu'un seul rayon de lumière; un point quelconque de la seconde courbe est complètement éclairé, c'est-à-dire qu'il reçoit tout le cône de lumière dont il est le sommet, et qui est circonscrit au cône lumineux.

La zone du corps opaque, renfermée dans la courbe de contact de la sur-

face de ce corps et de la nappe de l'ombre, est totalement privée de lumière. La zone, renfermée dans la seconde courbe de contact, qui appartient à la nappe de la pénombre, est totalement éclairée.

Enfin la zone du corps opaque, comprise entre les deux courbes de contact avec les deux nappes, est sur ce corps la limite de la pénombre; chacun des points de cette courbe n'est que partiellement éclairé par le corps lumineux.

Lorsque le foyer de lumière est réduit à un point unique, ce qui comprend le cas où les rayons de lumière sont parallèles entre eux, tous les points de l'espace sont totalement éclairés ou totalement dans l'ombre; il n'y a plus de pénombre. La surface de l'ombre d'un corps opaque est un cône ou un cylindre circonscrit à la surface de ce corps.

§ II. DES OMBRES ET DE LA PERSPECTIVE LINÉAIRES.

103. On sait que l'application la plus immédiate de la géométrie descriptive est la représentation des corps sur deux plans de projection (art. 1^{er}, liv. 1^{er}). Chacun des points pris à la surface de ces corps étant déterminé par ses projections sur deux plans rectangulaires, la combinaison des lignes droites ou courbes tracées sur les plans, fera connaître la forme, les dimensions et la position respective des objets représentés. Pour compléter cette description, on conçoit que les corps sont dans un milieu éclairé; qu'ils sont eux-mêmes en partie éclairés, en partie dans l'ombre; que leur ombre se projette sur d'autres corps environnans, ou sur les plans de projections. Les lignes de séparation d'ombre et de lumière, les contours d'ombres portées, en un mot tout ce qui résulte de l'hypothèse qu'on a faite sur la manière dont les corps sont éclairés, sert de base aux jugemens que nous portons sur la forme et la position respective des objets. Les lignes déterminées d'après cette hypothèse ont aussi leurs projections, et la construction de ces lignes est, dans un grand nombre de cas, un complément nécessaire de la description géométrique des corps. La construction de ces lignes n'est d'aucune utilité pour l'artiste qui se propose d'exécuter en relief un objet dont il a les deux projections; mais elle est d'un grand secours à l'ingénieur chargé de l'examen d'un projet qu'il ne connaît que par des dessins et par des mémoires joints à ces dessins.

104. Il était nécessaire pour atteindre le but qu'on s'est proposé en déterminant les lignes de séparation d'ombre et de lumière, et les contours d'ombres portées, de faire sur la manière dont les corps sont éclairés, une hypo-

thèse simple dont on pouvait prévoir facilement toutes les conséquences. Il était encore important que cette hypothèse ne s'écartât pas beaucoup de ce qui se passe continuellement sous nos yeux. On satisfait à ces conditions, en supposant que les corps sont éclairés ou par des rayons de lumière parallèles entre eux, ou par un seul point lumineux dont la position est donnée; c'est ainsi que pour chaque instant de jour, tous les objets sont éclairés par le soleil. A la distance dont cet astre est de la terre, les rayons solaires, quelle que soit leur direction, nous semblent toujours parallèles entre eux, quoique néanmoins ils convergent sensiblement vers la terre.

L'ombre des corps éclairés par la lumière d'une bougie ou d'un quinquet, diffère d'autant moins de celle qui résulterait d'un point lumineux unique, que les dimensions de la flamme sont plus petites, et dans tous les cas, le centre de cette flamme peut être considéré comme le point lumineux.

Des ombres dans l'hypothèse où les corps sont éclairés par des rayons de lumière parallèles, ou par un seul point lumineux.

105. Chaque rayon de lumière doit être considéré comme une droite qui traverse tous les milieux transparens, et s'approche indéfiniment des corps opaques en conservant toujours sa direction primitive. Les rayons tangens à la surface de chaque corps opaque forment ou une surface conique ou une surface cylindrique tangente à la surface de ce corps, et il est évident que la ligne de contact de ces deux surfaces est sur le corps opaque la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Cette ligne est en général une courbe à double courbure, et dans quelques cas particuliers une courbe plane. Chaque point de cette ligne est sur la surface du corps opaque, le point de contact de cette surface et d'un plan tangent qui passerait par le point lumineux, ou qui serait parallèle à des rayons de lumière dont la direction est donnée.

La limite de l'ombre d'un corps opaque, quelconque est ou une surface conique, ou une surface cylindrique, selon que la lumière part d'un point à une distance finie ou infinie des corps éclairés. La ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un corps opaque, peut être considérée comme la ligne de contact de la surface de ce corps et de la surface de l'ombre.

106. Lorsque le corps opaque est un polyèdre à faces planes, les arêtes intersections des faces éclairées et de celles qui ne le sont pas, forment sur chaque polyèdre un polygone dont en général les côtés ne sont pas dans le même plan; la pyramide qui a pour base ce polygone et pour sommet le point lumineux, détermine l'ombre du polyèdre; cette ombre se prolonge indéfiniment au-delà du polyèdre, à partir du polygone qui est la séparation d'ombre

et de lumière. Lorsque les rayons de lumière sont parallèles entre eux, la pyramide devient un prisme qui a de même pour base le polygone dont chaque côté est l'intersection de deux faces, l'une éclairée, et l'autre qui ne l'est pas ; les arêtes du prisme sont parallèles aux rayons de lumière.

107. L'ombre d'un corps opaque ayant pour limite la partie de la surface conique ou cylindrique circonscrite à la surface de ce corps, qu'on prolonge indéfiniment au-delà de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, tous les objets placés dans cette ombre sont totalement privés de lumière ; mais si l'on conçoit un autre corps opaque ou transparent, dont la surface est pénétrée par celle de l'ombre, l'intersection de ces deux surfaces sera une ligne qu'on appelle aussi *ombre* du premier corps opaque, quoiqu'elle ne soit que le contour de l'ombre portée par le premier corps sur le second. Appelant *ombres linéaires* les contours d'ombres portées par les corps opaques sur d'autres corps, et les lignes de séparation d'ombre et de lumière, qu'on a définies (art. 105), la détermination de ces ombres sera l'objet du paragraphe suivant ; elle comprendra la perspective linéaire que nous allons définir.

De la perspective linéaire.

108. Chaque point d'un corps éclairé n'est visible que par le rayon, ou par le petit faisceau de rayons de lumière, dont l'axe est dirigé vers l'œil d'un spectateur. Pour définir la science qu'on nomme *perspective*, nous supposons qu'on ait placé entre l'œil du spectateur et les corps qu'il aperçoit, une toile ou un tableau parfaitement transparent, de même couleur que le milieu dans lequel il est placé. Quelle que soit la surface de ce tableau, plane ou courbe, nous concevons que chaque rayon visuel qui le traverse, y laisse l'impression de la direction de la lumière, de son intensité et de tous les accidens qui déterminent les effets d'une vision parfaite : il est évident que ce tableau devra produire sur l'œil du spectateur la même sensation que les objets eux-mêmes ; que supprimant les objets, le spectateur n'en sera point averti, tant que l'image sera sous ses yeux. Cette image, peinte sur le tableau, est une perspective complète, qui comprend deux parties très-distinctes, qu'on nomme *perspective linéaire*, et *perspective aérienne*. Elle se réduit à la première partie lorsque les rayons visuels, en traversant le tableau, n'y ont laissé que l'impression de leur direction. La perspective aérienne est un art dont les règles servent de complément à la perspective linéaire : elle a pour objet de mettre sur chaque point du tableau la teinte et la couleur du rayon visuel qui passe par ce point ; les grands tableaux des peintres anciens et modernes prouvent assez que cette science est arrivée à un haut degré de

perfection : cependant elle n'a jamais été écrite ; on ne l'apprend que dans les ateliers de peinture. Un géomètre qui serait à la fois peintre et physicien, et qui considérerait la lumière sous le rapport de l'art, ferait un travail d'une grande utilité, et qui manque presque entièrement (*).

109. D'après la définition de la perspective linéaire, la perspective d'un point de l'espace est sur un tableau donné de forme et de position, le point d'intersection de la surface de ce tableau et de la droite menée par ce point et par l'œil du spectateur considéré comme un autre point (art. 96).

La perspective d'une ligne courbe est l'intersection de la surface conique qui a pour sommet l'œil du spectateur, et pour base la ligne courbe visible.

La perspective d'une surface a pour limite la courbe tracée sur le tableau, qui est la perspective d'une autre courbe de la surface qu'on nomme *contour apparent* : cette seconde courbe est la ligne de contact de la surface visible et d'un cône qui a pour sommet l'œil du spectateur.

La détermination des *ombres linéaires*, et la perspective linéaire, ne comprennent que ces deux problèmes de géométrie :

1° Trouver l'intersection d'une surface conique dont on connaît le sommet et la base, et d'une autre surface donnée.

Ce problème comprend le cas où la surface conique devient une surface cylindrique dont on connaît la base, et qui a pour génératrice une droite dont la direction est donnée.

2° Trouver la courbe de contact d'une surface donnée, et d'un cône dont on connaît seulement le sommet.

Ce second problème comprend le cas où le cône circonscrit à la surface proposée devient un cylindre dont les arêtes sont parallèles à une droite donnée.

La solution de ce dernier problème sert de base aux constructions graphiques, relatives aux ombres et à la perspective linéaires.

(*) Monge s'était beaucoup occupé de plusieurs questions relatives à la perspective aérienne. On a trouvé dans ses papiers une rédaction de la façon qu'il avait d'abord donnée aux Écoles normales de 1795, et postérieurement à l'École polytechnique. Le talent de Monge, comme professeur, brillait dans tout son éclat, lorsqu'il parlait de peinture ou d'architecture. On a rappelé des souvenirs très-agréables aux élèves qui ont eu le bonheur de l'entendre, en publiant ses *Recherches sur le dessin au lavis*, avec sa *Géométrie descriptive*, réimprimée en 1830 par les soins de M. Brisson-Huart.

§ III. CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES RELATIVES AUX OMBRES ET À LA PERSPECTIVE LINÉAIRES.

Du cône ou du cylindre tangent à une surface.

110. Lorsqu'un cône ou un cylindre est tangent à une surface donnée, un plan quelconque mené par une droite du cône ou du cylindre, coupe la surface suivant une courbe qui a pour tangente la droite; le point de contact sur cette droite appartient à la ligne de contact du cône ou du cylindre, et de la surface proposée.

La surface étant définie, des plans verticaux menés par le sommet du cône tangent, ou parallèlement aux droites du cylindre tangent, coupent la surface suivant des lignes que l'on construit par la méthode exposée (livre I^{er}, art. 66).

Les tangentes à ces lignes menées par le sommet du cône, ou parallèlement à la génératrice du cylindre, sont des droites du cône ou du cylindre tangent, et les points de contact sur les lignes de la surface proposée appartiennent à la courbe de contact de cette surface et du cône ou du cylindre. La construction de cette courbe est ramenée à la solution de cette question de géométrie plane : par un point donné hors d'une courbe plane, mener une tangente à cette courbe, ou lui mener une tangente qui soit parallèle à une droite donnée ?

Cette méthode, pour déterminer le cône ou le cylindre tangent aux surfaces, s'applique à toute surface dont on connaît la génération, et pour laquelle on peut assigner la génératrice qui passe par un point quelconque de cette surface. Si l'on demandait la section du cône ou du cylindre tangent par un plan donné, on pourrait l'obtenir avec une exactitude suffisante pour la pratique, sans être obligé de construire par points la ligne de contact du cône ou du cylindre tangent et de la surface proposée. Il suffirait de projeter sur le plan donné la ligne génératrice de la surface proposée, par des droites concourantes vers le sommet du cône, ou par des droites parallèles à celles du cylindre : les projections de cette ligne, considérée dans toutes ses positions, seraient touchées par une courbe unique, qui serait la section demandée du cône ou du cylindre tangent; connaissant la section plane d'un cône et son sommet, ce cône est déterminé.

Un cône ou un cylindre peut être inscrit ou circonscrit à une surface; dans les deux cas, nous les désignons par *cône tangent*, *cylindre tangent*. La détermination d'un cône tangent comprend celle d'un cylindre tangent dont la droite

génératrice est donnée en direction, car le cylindre est un cône dont le sommet est à l'infini sur une droite dont la direction est connue.

111. Le contour apparent d'une surface étant (art. 109) la base d'un cône tangent à cette surface, on déterminera ce cône par la méthode générale qui vient d'être exposée. Si l'on regarde le sommet du cône comme un point lumineux, le contour apparent devient la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface. Cette ligne, dans l'hypothèse des rayons lumineux parallèles, appartient au cylindre tangent, dont la droite génératrice est aussi parallèle à ces rayons.

Des deux méthodes (art. 110) par lesquelles on détermine le cône où le cylindre tangent, il est à remarquer que la première seulement donne le contour apparent, ou la courbe de contact du cône et de la surface proposée. La seconde donne seulement une section du cône tangent; néanmoins ce cône ayant pour sommet l'œil du spectateur, la section sera la perspective du contour apparent, en prenant le plan de la section pour le tableau.

Des surfaces développables et de leurs enveloppes.

112. Lorsqu'une surface conique est tangente à une autre surface, un plan tangent à la première surface est aussi tangent à la seconde; le contact du plan et du cône se fait suivant une arête de ce cône; l'intersection de cette arête, et de la ligne commune au cône et à la surface détermine le point de contact de cette surface et du plan; il suit de cette considération que la courbe de contact d'une surface et d'un cône tangent à cette surface, est le lieu géométrique des points de contact de la surface, et des plans tangens à la surface menés par le sommet du cône. Dans le cas où la surface proposée est développable, le cône ou le cylindre tangent se réduit à un plan, et pour déterminer ce plan, il suffit de mener par le sommet du cône, un plan quelconque qui coupe la surface développable suivant une courbe; la droite tangente à cette courbe menée par le sommet, et la droite de la surface développable qui passe par le point de contact, déterminent le plan tangent. Si ce plan devait être parallèle à une droite donnée, on couperait la surface développable par un plan parallèle à cette droite, et on mènerait une tangente à la section, parallèle à la même droite; cette droite tangente, et la droite de la surface développable menée par le point de contact, détermineraient le plan tangent. Le nombre de plans tangens qu'on peut mener à la surface développable, est égal au nombre de tangentes qu'on peut mener par un point donné, ou parallèlement à une droite donnée, à une section de la surface dont le plan passe par ce point, ou est parallèle à la droite donnée.

113. De quelque manière qu'une surface développable se meuve, les courbes qui résultent de ses intersections successives forment une seconde surface, qui est l'enveloppe de l'espace que parcourt la première (art. 42, liv. I^{er}). Ces courbes étant connues, la ligne de contact de la surface enveloppe et d'un cône dont on donne le sommet, sera déterminée. En effet, la surface mobile considérée dans une position quelconque est coupée par deux surfaces adjacentes suivant deux courbes; et l'élément de surface développable terminé par ces courbes, appartient à la surface enveloppe: or le plan tangent à la surface mobile, mené par le point donné, touche cette surface suivant une droite, et l'élément de la surface enveloppe suivant une portion de cette droite; donc le point d'intersection de la courbe qui termine cet élément, et de la droite de la surface développable, à laquelle appartient ce même élément, est sur la ligne de contact de la surface enveloppe de la surface développable mobile, et du cône, qui a son sommet au point donné.

Du cône ou du cylindre tangent à une surface enveloppe.

114. Nous déterminerons le cône tangent aux surfaces dites *enveloppes* (art. 47, liv. I^{er}), par une méthode particulière plus simple, plus exacte que la méthode générale précédemment exposée (art. 110).

Pour comprendre le principe sur lequel cette méthode est fondée, il faut considérer sur une enveloppée mobile deux lignes, savoir, la caractéristique de l'enveloppe, qui est (art. 47, liv. I^{er}) l'intersection de l'enveloppée mobile avec elle-même, et la courbe de contact avec un cône de même sommet que le cône tangent à l'enveloppe. Lorsque ces deux lignes se coupent, le point d'intersection appartient à la courbe de contact de l'enveloppe et du cône demandé; car l'enveloppe et l'enveloppée ayant en ce point même plan tangent, ce plan passe par le point donné, sommet du cône tangent à l'enveloppe.

Nous allons prendre pour exemples les surfaces de révolution et les surfaces réglées; elles sont comprises dans la famille des surfaces *enveloppes*, car les premières ont pour enveloppées des cônes droits, des sphères, ou des cylindres droits, qui ont pour bases les sections méridiennes: elles ont pour caractéristiques des cercles; les surfaces réglées ont pour enveloppées des hyperboloïdes à une nappe, ou des paraboloides hyperboliques, et pour caractéristiques des lignes droites. L'application de la méthode est facile pour ces deux genres d'enveloppes, parce qu'on trouve directement sur chaque caractéristique, le point de contact de l'enveloppe, et d'un plan passant par le sommet du cône tangent à cette enveloppe.

Du cône ou du cylindre circonscrit aux surfaces de révolution et à leurs enveloppes. — De la sphère et de ses enveloppes.

115. La sphère est une surface de révolution, qui a pour axe l'un de ses diamètres, et pour section méridienne le grand cercle dont le plan passe par ce diamètre. La courbe de contact de la sphère et d'un cylindre est un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite génératrice du cylindre tangent. Un cône touche la sphère suivant le petit cercle d'intersection de cette sphère et d'une seconde sphère qui a pour diamètre la distance du sommet du cône au centre de la première.

De quelque manière qu'une sphère constante ou variable de rayon se meuve, les intersections successives de la sphère mobile sont des cercles, parce que deux sphères qui se pénètrent ont pour ligne d'intersection un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint leurs centres (art. 203, liv. 1^{er}). La sphère mobile considérée dans une position quelconque, étant coupée par les deux sphères adjacentes suivant deux cercles, la zone sphérique comprise entre ces deux cercles est un élément de la surface enveloppe, lieu des intersections successives de la sphère mobile. Lorsque le cercle qui termine cet élément est rencontré par le cercle de contact de la sphère mobile et du cône dont on connaît le sommet, les points de rencontre appartiennent à la ligne de contact de la surface enveloppe, et du cône tangent à cette surface; car les plans tangents à l'enveloppe, menés par ces points, passeraient par le sommet du cône (art. 114).

Si la surface enveloppe de la surface mobile se mouvait elle-même suivant une loi donnée, elle engendrerait une nouvelle surface enveloppe. Connaissant pour chaque position de la première enveloppe sa *caractéristique* (art. 114), et la ligne de contact de cette enveloppe mobile avec le cône qui lui est tangent, l'intersection de ces deux lignes serait un point de la ligne de contact de la seconde enveloppe, et du cône tangent à cette enveloppe. Il en serait de même de toutes les enveloppes successives, qui dériveraient de la même surface primitive, pour lesquelles on déterminerait, par des procédés analogues, leurs lignes de contact avec un cône dont le sommet serait donné.

Du cône tangent à une surface de révolution.

116. Une surface de révolution peut être considérée comme l'enveloppe ou d'un cône, ou d'une sphère, ou d'un cylindre mobile; d'où l'on déduit trois

méthodes pour déterminer la courbe de contact de cette surface, et d'un cône qui lui est tangent.

Qu'on imagine par un point quelconque d'une surface de révolution deux plans, l'un perpendiculaire à l'axe, et l'autre passant par l'axe; la section du premier plan est un cercle, et la section du second plan une courbe méridienne. La tangente à cette courbe menée par le point de rencontre des deux sections, rencontre l'axe de révolution en un point, et ce point est le sommet d'un cône droit tangent à la surface, qui a pour base la section circulaire. Il n'y a aucun cercle de la surface de révolution, qu'on ne puisse regarder comme la courbe de contact de cette surface, et d'un cône droit qui aurait son sommet sur l'axe de révolution; d'où il suit qu'une surface de révolution est l'enveloppée de l'espace que parcourt un cône droit, qui varie de manière que sa base étant un cercle de la surface de révolution, sa génératrice est une tangente à la section méridienne, menée par le point où cette section coupe la base circulaire; le sommet du cône mobile étant constamment sur l'axe de révolution, ses intersections successives sont des cercles de la surface de révolution. Considérant le cône droit dans une position quelconque, et menant par le sommet du cône qui doit être tangent à la surface de révolution, un plan tangent au cône droit, l'arête de contact sur ce cône et sa base circulaire se couperont en un point; ce point appartient à la ligne de contact de la surface de révolution et du cône tangent à cette surface, dont le sommet est donné hors la surface; car le plan tangent à la surface de révolution, mené par le point ainsi déterminé, passerait par le sommet du cône inscrit ou circonscrit.

117. Une sphère mobile qui aurait successivement pour rayons, les parties de normales à la section méridienne d'une surface de révolution, comprises entre la section et l'axe de révolution, et de plus pour centres les points de rencontre des normales et de l'axe, engendrerait la surface de révolution. Il y a pour chaque position de la sphère mobile (art. 115), la *caractéristique* de son enveloppe, qui est un cercle de la surface de révolution; ce cercle est coupé par le cercle de contact de la même sphère mobile et du cône dont le sommet est donné; l'intersection de ces deux cercles appartient à la ligne de contact de la surface de révolution et du cône tangent à cette surface.

118. Chaque section méridienne d'une surface de révolution étant considérée comme la base d'un cylindre dont les arêtes sont perpendiculaires au plan de la section, ce cylindre est tangent à la surface; faisant mouvoir ce cylindre de manière que sa base se trouve successivement dans les différents plans méridiens, ses intersections successives seront les sections méridiennes: or il y a pour chaque position du cylindre mobile, la *caractéristique* qui est

une section méridienne de la surface, et sur chaque cylindre, une arête de contact avec le plan tangent à ce cylindre, mené par le sommet donné du cône; l'intersection de l'arête et de la section détermine un point de la courbe de contact de la surface de révolution et du cône inscrit ou circonscrit à cette surface.

119. Ces trois méthodes ne s'appliquent pas seulement à la recherche de la courbe de contact d'une surface de révolution et d'un cône dont le sommet est donné; elles serviraient aussi à trouver cette courbe dans le cas où le sommet du cône étant à l'infini, le cône tangent deviendrait un cylindre tangent. La surface mobile génératrice de la surface de révolution étant un cône ou un cylindre, on mènerait un plan tangent à cette surface parallèle à la droite génératrice du cylindre, et ce plan tangent serait substitué à celui qu'on aurait mené par un sommet donné. Regardant la sphère comme la génératrice de la surface de révolution, on construirait pour chaque position de la sphère mobile, le grand cercle suivant lequel cette sphère est touchée par un cylindre dont les arêtes, sont parallèles à celles du cylindre tangent à la surface de révolution; l'intersection de ce grand cercle, et du petit cercle commun à la sphère et à la surface de révolution, déterminerait un point de la ligne de contact de la surface de révolution et du cylindre tangent.

On ferait pour les enveloppes successives d'une surface de révolution quelconque, les mêmes raisonnemens que pour les enveloppes successives de la sphère (art. 115); la caractéristique d'une enveloppe quelconque, et la ligne de contact d'un cône avec la surface mobile qui contient cette caractéristique, déterminent par leur intersection, un point de la ligne de contact de la surface enveloppe et d'un cône tangent à cette surface.

Du cône tangent à une surface réglée.

120. Avant de construire la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre et d'une surface réglée, rappelons ce qui a été dit (art. 160, liv. I^{re}) sur le plan tangent à cette surface. On a fait voir que ce plan à la fois tangent et sécant, coupe la surface réglée suivant une courbe qui contient le point de contact; et comme ce point est aussi sur la droite de la surface par laquelle on a mené le plan tangent, l'intersection de cette droite et de la courbe détermine sa position.

La surface réglée la plus générale, est engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois courbes données.

Soient AB, A'B', A''B'' trois courbes quelconques d'une surface réglée (*pl. suppl. A, fig. 8*); la droite mobile prend successivement les positions AA'A'',

BB'. La droite AA'A" rencontre les trois courbes données aux points A, A', A", et si l'on mène par ces points les tangentes AA', A'i, A'h, la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur ces trois tangentes aux courbes données, est tangente (art. 149, liv. I^{er}) à la surface réglée générale suivant la droite AA'A" qui leur est commune. Les deux surfaces se touchent suivant cette droite, parce qu'elles ont un élément gauche commun AA'A"aa'a". Nous avons démontré (art. 144, liv. I^{er}) qu'un plan passant par la droite AA'A", et tournant autour de cette droite, était dans toutes ses positions tangent à la surface réglée particulière, qui a pour directrices les trois droites AA', A'i, A'h; d'où il suit que ce plan est aussi tangent dans toutes ses positions à la surface réglée générale, et pour chacune de ses positions, le point de contact est le même pour les deux surfaces. Ainsi, ayant déterminé ce point sur la surface réglée particulière que nous avons nommée (art. 134, liv. I^{er}) *hyperboloïde à une nappe*, il l'est aussi sur la surface réglée générale.

L'hyperboloïde tangent à la surface réglée devient (art. 150, liv. I^{er}) un paraboloidé, lorsque les trois droites directrices de la première surface sont parallèles à un même plan.

121. Connaissant pour chaque position de la droite mobile génératrice d'une surface réglée, l'hyperboloïde ou le paraboloidé tangent, le plan mené par cette droite et par le sommet du cône tangent à la surface, touchera l'hyperboloïde ou le paraboloidé en un point qui sera déterminé; ce point appartient à la courbe de contact du cône et de la surface réglée générale. Lorsque le plan mené par la droite de la surface est parallèle à la droite génératrice du cylindre tangent, il touchera l'hyperboloïde ou le paraboloidé en un point, qui sera sur la courbe de contact du cylindre et de la surface réglée. La courbe de contact du cône ou du cylindre tangent sera donc déterminée. Dans le cas où l'on ne connaît une surface réglée que par la loi du mouvement de sa droite génératrice, et en supposant que les tangentes à cette surface qui déterminent les hyperboloïdes ou paraboloides tangens ne sont pas données, on peut encore construire la courbe de contact, en remarquant que le plan mené par le sommet du cône tangent et par la droite de la surface réglée, est tangent à cette surface. En effet ce plan, quoique tangent, coupe toutes les droites de la surface réglée, placées de chaque côté de la droite par laquelle on l'a mené; or les points d'intersection (art. 160, liv. I^{er}) forment sur la surface une ligne dont la tangente est dans le plan de la courbe; donc ce plan est tangent au point de la surface où la courbe et la droite de cette surface se rencontrent, puisqu'il contient une tangente à cette courbe, et une droite de la surface qui est sa propre tangente; le point de contact du plan tangent est à l'intersection de la courbe et de la droite de la surface. D'après cette consi-

dération, on déterminera chaque point de la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre tangent à une surface réglée, par l'intersection d'une droite et d'une courbe construite par points. La détermination de cette courbe, au moyen de l'hyperboloïde ou du paraboloides tangent, est bien préférable, puisqu'on trouve chaque point de la courbe de contact par l'intersection de deux droites.

Si l'on demandait le cône tangent à la surface enveloppe de l'espace que parcourt une surface réglée, on déterminerait pour chaque position de la surface réglée mobile, la caractéristique de l'enveloppe, et le cône de même sommet que le cône demandé, tangent à cette surface réglée mobile; la courbe de contact de ce cône et de la surface mobile rencontrerait la caractéristique de l'enveloppe, en un point de la ligne de contact de cette enveloppe et du cône qui lui est tangent.

Des points limites de la courbe de contact d'une surface donnée et d'un cône ou d'un cylindre tangent à cette surface.

122. Le mode de génération des surfaces en détermine la forme, et lorsqu'on demande un cône ou un cylindre tangent à ces surfaces, on les suppose prolongées indéfiniment, de manière que la courbe de contact ait toute l'étendue dont elle est susceptible. Cette hypothèse convient aux généralités de la géométrie; mais les corps éclairés et pour lesquels on demande les lignes de séparation d'ombre et de lumière, sont terminés par des surfaces qui ont pour limites les arêtes ou les lignes communes aux surfaces adjacentes, et on ferait un travail graphique inutile, si l'on construisait les contours des ombres portées, ou les lignes de séparation d'ombre et de lumière, hors de ces limites. Pour éviter ce travail, on considérera chaque arête de la surface d'un corps de deux manières, d'abord comme la base d'un cône qui aurait son sommet au point lumineux, ensuite comme la ligne de contact de la surface du corps, et d'une surface développable qui serait le lieu des intersections successives des plans tangens au corps menés par les points de l'arête.

La surface du cône lumineux qui a pour base l'arête du corps, rencontrera les lignes qui portent ombre sur ce corps en des points; et les rayons de lumière menés par ces points, couperont la surface du corps en d'autres points qui seront, sur l'arête de ce corps, des points limites du contour des ombres portées.

Ayant mené par le point lumineux un plan tangent à la surface développable qui passe par l'arête du corps, la droite de contact coupera cette arête en un point qui sera une limite de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le corps.

Si le point lumineux est à l'infini, le cône lumineux qui a pour base l'arête du corps proposé, se change en un cylindre dont la droite génératrice est parallèle au rayon de lumière, et le plan tangent à la surface développable est aussi parallèle à ces rayons.

Nous ferons l'application de ces propositions à la détermination de l'ombre d'une vis triangulaire.

Ces préliminaires posés, nous allons d'abord considérer les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur les corps simples de la géométrie, tels que le polyèdre à faces planes, la sphère, le cylindre et le cône droit, et déterminer les ombres portées par des droites ou par des cercles donnés, sur quelques-unes de ces surfaces.

§ IV. DU TRACÉ DES OMBRES LINÉAIRES.

De l'ombre d'un polyèdre à faces planes.

123. Lorsqu'un polyèdre est éclairé par des rayons de lumière parallèles entre eux, l'ombre de ce corps, ou l'espace qu'il prive de lumière, est un prisme dont chaque face est dans un plan mené par une arête du polyèdre parallèlement aux rayons de lumière. Le système d'arêtes qui forment sur le polyèdre la ligne de séparation d'ombre et de lumière, est déterminé par cette considération, que chacune d'elles est l'intersection de deux faces, l'une éclairée et l'autre dans l'ombre, et que ces faces sont placées du même côté par rapport au plan qui contient l'ombre de l'arête. Si par un point quelconque d'une arête du polyèdre, on mène une parallèle aux rayons de lumière, cette parallèle ou son prolongement sera dans l'angle des deux faces dont elle est l'intersection, ou en dehors. Dans le premier cas, les deux faces seront ou éclairées ou dans l'ombre. Dans le second cas, l'une sera éclairée et l'autre dans l'ombre, et on sera assuré que leur intersection appartient à la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Les faces du prisme d'ombre étant connues, on cherchera les lignes d'intersection des plans qui forment ce prisme, et des surfaces planes ou courbes qui terminent les corps dont la position par rapport au prisme est connue; ces lignes seront les contours des ombres portées sur ces corps par le polyèdre. Leur construction est une application très-simple de la géométrie descriptive; et pour en montrer un exemple, nous supposons qu'il faille trouver l'ombre d'une cheminée sur un comble. La solution de cette question se réduit à trouver l'ombre d'un point et l'ombre d'une droite sur des plans don-

nés : or, l'ombre d'un point est sur la droite menée par ce point parallèlement au rayon de lumière, et l'ombre d'une droite est dans un plan conduit par la droite parallèlement à ce rayon de lumière, en sorte que la droite étant verticale, le plan qui contient son ombre est aussi vertical ; donc les parallèles au rayon de lumière menées par des points donnés, et les plans parallèles au rayon de lumière menés par des droites données, rencontrent les plans ou les surfaces aussi donnés, suivant des points ou des lignes qui déterminent les ombres des points et des droites, qu'on suppose éclairés par des rayons de lumière parallèles entre eux.

De l'ombre d'une cheminée sur un comble. (Pl. 1. O.)

124. La cheminée porte ombre sur un comble de bâtiment, et pour décrire le bâtiment, nous le rapporterons, suivant l'usage des architectes, à trois plans, l'un horizontal, qu'on appelle simplement *plan*, et les deux autres verticaux, qu'on nomme *élévation* et *profil*.

Description du bâtiment. (Fig. 1, 2, 3.)

125. Le plan de ce bâtiment (*fig. 1*) est un rectangle ABCD, dont les côtés AB, BC, CD représentent les faces verticales extérieures de trois murs droits. Le long de ces murs règne une corniche dont la saillie est la même sur les trois faces. Les filets extrêmes de cette corniche se projettent sur le plan (*fig. 1*), suivant les droites EF, FG, GH. La portion de corniche correspondante au petit côté BC du bâtiment se termine aux deux plans verticaux, dont les traces horizontales BF, CG divisent en parties égales les angles droits EFG, FGH.

Le comble du bâtiment a la forme d'un prisme, dont les arêtes sont horizontales, et qui a pour base un triangle dont le plan est incliné par rapport au plan horizontal. On nomme en charpente cette partie triangulaire du comble, correspondante au petit côté du bâtiment, *croupe droite*; l'autre partie, formée de deux plans également inclinés par rapport à l'horizon, se nomme *long pan*. La droite intersection de ces plans s'appelle *ligne de couronnement du comble*. Le triangle KMN (*fig. 1*) est la projection horizontale de la croupe; les trapèzes IKLM, IKON sont les projections des longs pans; la ligne de couronnement a pour projections (*fig. 1* et 2) les droites IK, I'K'; les latis de long pan et de croupe se prolongent jusqu'à l'extrémité de la corniche. Trois surfaces cylindriques, telles que (NMFG, N'G') (*fig. 1* et 2), raccordent les plans inclinés des trois latis et le plan horizontal supérieur de

la corniche. Le raccordement se fait, 1° sur la corniche, suivant les horizontales qui ont pour projections les droites HC , GF , FE (fig. 1), et la droite unique $G'H'$ (fig. 2); 2° sur les plans des lattis, suivant les horizontales dont les projections sont ON , NM , ML (fig. 1), et $O'N'$ (fig. 2).

Le comble est traversé par une cheminée, dont les quatre faces verticales extérieures coupent le plan du lattis de long pan, suivant un parallélogramme qui a pour projections (fig. 1 et 2) $abcd$, $a'b'c'd'$. Les côtés ad , cb du parallélogramme $abcd$, prolongés, coupent la projection horizontale $K'NC'$ de l'intersection des plans de lattis et de croupe, aux points z , v . Élevant les perpendiculaires zz' , vv' à l'intersection des plans de projections (fig. 1 et 2), qui coupent la droite $K'N'$ aux points z' , v' , et menant par ces points les horizontales $z'b'a'$, $v'd'c'$, on aura la projection verticale $a'b'c'd'$ qui correspond à la projection horizontale $abcd$ de la section de la cheminée par le plan du lattis de long pan.

Les quatre faces intérieures coupent ce plan du lattis suivant un autre parallélogramme, qui a pour projections (fig. 1) $ab\gamma\delta$. Le bandeau de la cheminée a pour projection horizontale $efgh$ (fig. 1), et pour projection verticale (fig. 2) $e'f'g'h'$.

Le comble et la cheminée étant éclairés par des rayons de lumière parallèles à la droite (ST, ST') , on demande 1° le système de droites qui séparent l'ombre de la lumière; 2° les ombres portées par les lignes de séparation d'ombre et de lumière, sur le corps de cheminée et sur les trois plans du comble qu'on nomme *longs pans* et *croupe*, plans qui se rencontrent au point (K, K') de la ligne de couronnement $(KI, K'T')$.

Lignes de séparation d'ombre et de lumière sur la cheminée.

126. En faisant abstraction du creux de la cheminée et de son ouverture supérieure $(ab\gamma\delta, e'f')$, le bandeau est un prisme plein, qui a pour projections horizontale et verticale les deux rectangles $efgh$, $e'f'g'h'$. La ligne de séparation d'ombre et de lumière sur ce prisme, se compose de la verticale $(h, h'f')$, des deux horizontales (hf, f') , $(fe, e'f')$, de la verticale $(e, e'g')$, et des deux horizontales (eg, g') , $(gh, g'h')$. La ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le corps de la cheminée, se réduit aux deux verticales $(a, a'a'')$, $(b, b'b'')$.

Ombre du bandeau sur la cheminée.

127. Le contour de l'ombre que le bandeau porte sur la cheminée, se compose de l'ombre portée par les horizontales $(gh, g'h')$, (eg, g') sur les faces

verticales bc , ca (*fig. 1*) du corps de la cheminée. En menant par le point g' (*fig. 2*) une parallèle $g'e'$ à la projection verticale ST' du rayon de lumière, elle coupe la verticale $a'a'$ au point π , projection verticale de l'ombre portée par l'horizontale (ge , g') du bandeau sur la face verticale ac (*fig. 1*) du corps de cheminée. L'ombre du point (h , h') de l'horizontale (gh , $g'h'$) se trouve sur la parallèle ($h\pi$, $h'\pi'$) au rayon de lumière : or, cette parallèle coupe le prolongement de la face verticale cb du corps de cheminée au point (π , π') ; donc si l'on mène (*fig. 2*) l'horizontale $\pi' b'a'$, la partie $a'b'$ de cette horizontale sera la projection verticale de l'ombre portée par l'horizontale (gh , $g'h'$) sur la face verticale bc (*fig. 1*) du corps de cheminée.

Ombre de la cheminée et du bandeau sur le comble.

128. L'horizontale (fh , f') porte ombre sur le plan $K'N'$ (*fig. 2*) du lattis de croupe. Cette ombre est une autre horizontale (56 , $6'$) qu'on détermine en menant (*fig. 1* et *2*) les parallèles ($h6$, $f'6'$), ($f5$, $f'6'$) au rayon de lumière. Ces parallèles coupent le plan de croupe aux points (6 , $6'$), (5 , $6'$), extrémités de l'ombre portée (56 , $6'$). Le point (6 , $6'$) appartient aussi à l'ombre (67 , $67'$), portée par la verticale (h , $f'h'$) sur le plan du lattis de croupe. La parallèle au rayon de lumière menée par l'extrémité (h , h'), de la verticale (h , f'), coupe le plan de croupe au point (7 , $7'$) de la droite (67 , $67'$). Ce point est l'origine de l'ombre qui est portée par l'horizontale (gh , $g'h'$) sur le même plan, et dont la projection horizontale est 78 (*fig. 1*). Cette droite 78 prolongée coupe la droite MN au point n de la droite MN , qu'on détermine en menant par l'horizontale (MN , N') un plan ($N'\mu'$, *fig. 2*) parallèle au rayon de lumière ; ce plan coupe l'horizontale (gh , $g'h'$) prolongée au point (μ , μ'), et la parallèle μn (*fig. 1*) à la projection horizontale ST du rayon de lumière, coupe la droite MN au point n . L'ombre de la verticale (b , $b'b'$) se projette (*fig. 1*) suivant la parallèle $b8$ à ST , qui rencontre la droite $n7$ prolongée au point 8 ; la droite $b8$ prolongée coupe la droite gh au point p ; ce qui apprend que la projection horizontale 78 de l'ombre portée par la droite (gh , $g'h'$), correspond à la portion de cette droite, dont hp est la projection horizontale. Les droites (gh , $g'h'$), (ef , $e'f'$), et les ombres qu'elles portent sur le plan du lattis de croupe étant parallèles, les projections horizontales de ces ombres sont aussi (*fig. 1*) des droites parallèles $n78$, 54 . On aurait directement le point q intersection des droites 54 , KM , en prolongeant (*fig. 2*) la droite $K'N'$ jusqu'à un point j de la droite $e'f'$, et en abaissant la ligne de projection Jj , qui coupe la droite ef au point J ; la droite $J5$ rencontre la droite KM au point q . Le point (J , j) étant l'intersection du plan du lattis de croupe $K'N'$ et de l'horizontale (ef , $e'f'$),

ce point appartient à l'ombre (54, 64') portée par cette horizontale sur le plan du lattis K'N'.

Puisque la droite 54 se termine au point 4 de la droite KM, limite de la projection horizontale du lattis de croupe, la parallèle 43 à la ligne de couronnement est la projection horizontale de l'ombre portée par l'horizontale (ef, e'f') sur le lattis de long pan IKLM (fig. 1). La verticale (e, e'g') du bandeau porte sur le lattis une ombre contenue dans le plan vertical e23 (fig. 1) parallèle au rayon de lumière. L'horizontale (eg, g') porte aussi ombre sur le même lattis de long pan, et, pour la déterminer, on mène par cette horizontale un plan (g'u'e', fig. 2) parallèle au rayon de lumière : ce plan coupe les deux horizontales (IK, I'K'), (LM, O'N') du lattis de long pan aux points (u, u'), (e, e'). La droite us (fig. 1) coupe la droite e23 au point 2, extrémité de la droite 23, projection horizontale de l'ombre de l'arête verticale (e, e'g') du bandeau. Mais l'ombre de la verticale (a, a'a') du corps de cheminée a pour projection horizontale la parallèle a1 à ST, et cette parallèle coupe la droite us au point 1; d'où il suit que le contour de l'ombre portée par la cheminée et son bandeau sur les trois plans de lattis, a pour projection horizontale le polygone à neuf côtés, qui sont (fig. 1) : a1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 8b. Pour construire la projection verticale de ce contour, on peut se servir d'un nouveau plan de projection, par exemple, du profil (fig. 3) dont le plan est perpendiculaire à la ligne de couronnement, et dont la trace (fig. 1) est PRQ. En faisant tourner ce profil d'un quart de révolution, on obtient la figure prq (profil fig. 3), dont l'angle r est égal à celui des deux lattis de long pan; ce second plan de projection n'est pas nécessaire, et nous n'en ferons usage que comme un moyen de vérifier les constructions sur les plans de projections (fig. 1 et 2).

123. Le plan vertical by8 (fig. 1) de l'ombre de la verticale (b, b'd'), arête de la cheminée, coupe l'intersection (KN, K'N') des lattis de long pan et de croupe, au point (y, y'); d'où il suit que l'ombre de cette arête sur le plan de lattis de long pan a pour projection horizontale et verticale les droites by (fig. 1), dy' (fig. 2).

L'horizontale du lattis de long pan, dont la projection horizontale est 34 (fig. 1), a pour projection verticale la droite 3'4' qu'on détermine en menant la perpendiculaire 44' à l'intersection commune des plans des fig. 1 et 2. Les perpendiculaires à cette intersection 33' et 22' coupent (fig. 2) l'horizontale 4'3' et la droite g'e' aux points 3', 2' qui déterminent la projection verticale 2'3' correspondante à la projection horizontale 23 de l'ombre portée par l'arête verticale (g, g'e') du bandeau sur le lattis du long pan. L'ombre portée par l'arête verticale de la cheminée (a, a'a') sur les deux plans de lattis, est formée des

deux droites en chevron ($ax, a'x'$), ($\lambda 1, \lambda'1'$), dont les projections verticales $a'x', \lambda'1'$ (fig. 2) comprennent entre elles l'angle $a'x'1'$, qui est divisé en deux parties égales par la droite $\lambda\lambda'$. Les trois sommets du triangle $\lambda\mu 1$ (fig. 1) correspondent en projection verticale (fig. 2) aux sommets $\lambda', \mu', 1'$ du triangle $\lambda'\mu'1'$.

Ainsi les ombres portées par la cheminée sur les trois plans de lattis qui se rencontrent au point (K, K') de la ligne de couronnement, sont en projection verticale :

1^o Pour le plan de lattis de croupe KMN (fig. 1).....G'K' (fig. 2);

2^o Pour le plan de lattis de long pan KION (fig. 1).....x'd'e'a'x'K' (fig. 2);

3^o Pour le plan de lattis de long pan KILM (fig. 1) i'2'3'4' (fig. 2).

On aurait pu déterminer l'horizontale 4'3' (fig. 2) en se servant du profil (fig. 3), sur lequel on a projeté le rayon de lumière (ST, ST') (fig. 1 et 2) suivant la droite ST". L'horizontale ($ef, e'f'$) étant projetée sur ce profil au point e' , la parallèle $e'4''$ à ST", coupe la droite S'g au point 4" située sur l'horizontale 4'3' prolongée. La projection horizontale de ce point 4" étant u (fig. 1), la parallèle à IK menée par le point u se confond avec la droite 34.

De l'ombre d'une seconde cheminée (X, X'), (fig. 1a et 1b, pl. I. O.) sur le plan de lattis de long pan (IKNO, I'K'N'O'), (fig. 1 et 2) ().*

130. La cheminée (X, X') et son bandeau étant donnés de forme et de position, on détermine l'ombre qu'elle porte sur le plan de l'un des lattis de long pan, en procédant de la même manière que pour la première cheminée. Après avoir reconnu les droites horizontales et verticales, qui forment la ligne de séparation d'ombre et de lumière, on cherche l'ombre de ces droites sur le plan de lattis de long pan, et le contour de cette ombre est en projection horizontale (fig. 1.a) $a112345678b$, en projection verticale (fig. 1.b) $a'b'c'd'8'7'6'5'3'2'1'a'$.

Pour construire ces projections, on mène par l'horizontale (fh, f') un plan parallèle au rayon de lumière, qui coupe le plan du lattis de long pan suivant la droite ($f'm'k, mk$). Les parallèles $h76, f'45$ à ST (fig. 1.a) interceptent sur la droite mk le côté 56 de la projection horizontale du contour de l'ombre de la cheminée (X, X').

Un second plan parallèle au rayon de lumière, mené par l'horizontale (fh, h'), coupe le plan du lattis de long pan suivant la droite ($h'l, l'$); le point 7 (fig. 1.a) étant déterminé par la rencontre de la droite $h6$, et de la parallèle 47 à 56.

(*) Les fig. 1.a et 1.b sont tracées sur les plans des fig. 1 et 2; on les distingue par les lettres a et b , parce qu'on se sert pour l'explication de ces figures de lettres ou chiffres déjà employés dans les fig. 1 et 2.

ou a 67 pour la projection de l'ombre de l'arête verticale du bandeau ($h, f'h''$). Les parallèles 53, 42, et IK, coupent la parallèle à ST menée par le point e, aux points 2, 3 extrémités de la projection 23 de l'ombre de la verticale ($e, e'g'$) du bandeau. Menant les parallèles a1, b8 à ST, la parallèle 21 à 56, et la parallèle 78 à 35, on a la projection horizontale totale a123 5678b (fig. 1.a).

Le prisme vertical $abcd$ (fig. 1.a) du corps de la cheminée coupe le plan du lattis suivant un parallélogramme dont la projection verticale (fig. 1.b) est $a'b'c'd'$. Les droites ad, cb (fig. 1.a) étant prolongées jusqu'en NK, et les points de rencontre étant mis en projection verticale sur deux autres points de la droite K'N' (fig. 2), les horizontales menées par ces derniers points coupent les verticales $a'a'', b'b''$ (fig. 1.b) aux sommets a', b', c', d' du parallélogramme $a'b'c'd'$.

Les verticales élevées par les points (5, 6, 7, fig. 1.a) et projetées (fig. 1.b), coupent les droites $f'k', h'g'$ aux points 5', 6', 7'. Menant l'horizontale 7'8' de même longueur que 78 (fig. 1.a), et joignant les points $d', 8'$, la droite $d'8'$ est la projection verticale correspondante à la projection horizontale b8 (fig. 1.a). La parallèle $a'1'$ à $d'8'$ (fig. 1.b) contient la projection verticale 1' correspondante au point 1 (fig. 1.a). La parallèle $1'2'$ à 5'6' détermine le point 2' correspondant à 2 (fig. 1.a); la parallèle $2'3'$ à $d'8'$ contient la projection verticale 3' correspondante à 3 (fig. 1.a); menant l'horizontale 3'5' (fig. 1.b), on a pour la projection verticale du contour de l'ombre portée par la cheminée (X, X') sur le plan de lattis de long pan, la figure ($c'd'8'7'6'5'3'2'1'a'c'$).

131. Pour compléter l'explication de la première planche des ombres (pl. 1. O.), nous n'avons à considérer que l'ombre du bâtiment sur le plan horizontal, et l'ombre de la corniche sur une face éclairée du mur.

La face du mur CD (fig. 1, pl. 1. O.) qui est éclairée, et la face à angle droit CB qui est dans l'ombre, se coupent suivant une verticale C, qui porte sur le plan horizontal (fig. 1), l'ombre C'C'' parallèle à ST, projection horizontale du rayon de lumière.

L'horizontale de la corniche (GH, fig. 1) et (11'.12', fig. 2) porte ombre sur la face verticale CD du mur, et l'ombre portée est une autre horizontale qu'on détermine en menant par un point quelconque (o, o') de la première horizontale, une parallèle au rayon de lumière qui coupe le plan vertical CD au point (10, 10'), dont la projection verticale (fig. 2) est 10'. L'horizontale 10'.13 est la projection verticale de la limite de l'ombre portée par la corniche sur la face verticale CD (fig. 1) du bâtiment.

Cet exemple suffit pour faire voir comment on déterminerait l'ombre d'un polyèdre à faces planes, quelle que fût la position de ses arêtes par rapport aux surfaces qui reçoivent les ombres portées par ces arêtes.

OMBRES D'UNE SPHÈRE. Pl. 2. O, fig. (1, 2, 3).

132. Une sphère suspendue à l'extrémité d'un fil, est éclairée par des rayons de lumière parallèles; on demande la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur cette sphère, et le contour de l'ombre qu'elle porte sur un plan horizontal donné (*pl. 2. O*)?

Soit XY (*fig. 1 et 2, pl. 2. O*) la droite d'intersection des deux plans de projection auxquels on rapporte une sphère du rayon AB , dont le centre a pour projections les points A, a . La direction de la lumière est déterminée par les deux projections L, l d'un rayon lumineux.

On sait (art. 115) que la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la sphère est un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction de lumière. Pour construire ce cercle, on rapporte la sphère à un nouveau plan vertical de projection, dont la trace $X'Y'$ (*fig. 3*) sur le plan horizontal est parallèle à la projection horizontale L du rayon lumineux. On projette sur ce plan le centre de la sphère et la parallèle au rayon de lumière menée par ce centre. Cette parallèle coupe le plan horizontal au point D ; abaissant les perpendiculaires Aa' et Dd' sur $X'Y'$; faisant $a'a''$ (*fig. 3*) $= aA'$ (*fig. 2*), et tirant $a'd'$, on aura le triangle $a'ad'$, dont les côtés $a'd'$, $d'a'$ sont, l'un, une parallèle au rayon lumineux passant par le centre de la sphère, et l'autre, une parallèle à la projection horizontale AD de ce rayon. La perpendiculaire ea' au côté $a'd'$, menée par le point a' , détermine la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la sphère. Cette ligne est un grand cercle de la sphère du diamètre ef , dont le plan est perpendiculaire au plan vertical $X'Y'$. La projection horizontale de ce grand cercle est une ellipse qui a pour grand axe le diamètre GH du grand cercle de la sphère décrit du point A comme centre, et pour petit axe la droite EF projection horizontale de ef , *fig. 3*. Le diamètre GH , *fig. 1*, est dirigé suivant la droite Aa perpendiculaire à XY . Des deux projections $EFGH$, *ef*, *fig. (1 et 3)*, du grand cercle séparation d'ombre et de lumière sur la sphère, on déduit la seconde projection verticale $ef'gh'$, *fig. 2*, tracée sur le plan XY . Les points i, k de cette projection sont sur le grand cercle de la sphère décrit du point a comme centre; ils correspondent aux points I, K de la projection horizontale $EFGH$, que l'on détermine en baissant les perpendiculaires iI, kK sur le diamètre BAC parallèle à XY .

Les points remarquables de la seconde projection (*fig. 2*) sur le plan vertical XY , sont ceux pour lesquels les tangentes à l'ellipse $ef'gh'$ (projection de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la sphère) sont parallèles 1° au diamètre ac du grand cercle de la sphère; 2° à la verticale $A'a$; 3° à l'horizontale ab ou ac ; on construira ces points de la manière suivante :

1° *Constructions des points r' , s' de l'ellipse $ef'gh$ (fig. 2), pour lesquels les tangentes sont parallèles au diamètre ik .*

133. Le diamètre $(IK, ik, \text{fig. 1 et 2})$ du grand cercle séparation d'ombre et de lumière sur la sphère, a pour projection sur le plan vertical $X'Y$ (fig. 3) la droite ik' , et en faisant tourner ce cercle autour de sa trace ef pour l'abattre sur le plan $X'Y$, le diamètre (IK, ik) devient $ma'n$ (fig. 3); élevant la perpendiculaire $pa'q$ à mn , les points p et q du grand cercle décrit du point a' comme centre, sont ceux pour lesquels les tangentes à ce cercle sont parallèles à la droite $ma'n$: or les projections de ces points sur le plan $X'Y$, sont r et s , sur le plan horizontal R et S , et sur le plan vertical $X'Y$ (fig. 2), r' , s' ; donc les tangentes à l'ellipse $ef'gh$ menées par ces points r' , s' , sont (art. 11, liv. 1^{re}) parallèles à la droite ik , et parce que cette droite est le grand axe de l'ellipse $ef'gh$, la droite $r's'$ en est le petit axe.

Les points R, S (fig. 1), appartiennent au cercle décrit du point A comme centre, avec un diamètre égal à celui des petits cercles égaux de la sphère contenus dans les plans horizontaux, menés par les points r et s (fig. 3) du plan vertical $X'Y$; r et r' , ou s et s' étant les projections verticales sur les deux plans $XY, X'Y$, des mêmes points du cercle de séparation d'ombre et de lumière, on a, après avoir mené les horizontales ru, st (fig. 3), ru', st' (fig. 2), qui coupent les verticales $aa', A'a$ (fig. 3 et 2), aux points u, t, u', t' :

$$at \text{ (fig. 3) } = at' \text{ (fig. 2) }; au \text{ (fig. 3) } = au' \text{ (fig. 2)}.$$

D'où il suit que les points r', s' (fig. 2) sont sur les horizontales connues $u'r', t's'$.

2° *Construction des points v', z' de l'ellipse $ef'gh$ (fig. 2), pour lesquels les tangentes sont verticales.*

134. Le plan vertical AA' (fig. 1) coupe une horizontale (Ff', f') (fig. 1 et 3) du plan du cercle de séparation d'ombre et de lumière au point (ϕ', f') ; l'intersection de ces deux plans devient $a'\phi'$, sur le plan du cercle qu'on a couché sur le plan vertical $X'Y$, en le faisant tourner autour de la droite ef comme charnière: on obtient cette droite $a'\phi'$, en prenant la droite $f\phi'$ perpendiculaire sur ef , égale à $F\phi'$ (fig. 1). Élevant la perpendiculaire $\pi a'\pi'$ (fig. 3) à la droite $a'\phi'$, qui coupe le grand cercle de la sphère, dont le centre est en a' , les tangentes à ce cercle menées par les points d'intersection π, π' , sont évidemment parallèles à la droite $a'\phi'$: or ces points π, π' ont pour projections sur le plan vertical $X'Y$, deux points z et v du diamètre $ea'f$, qui sont à la même distance du centre a' ; donc si l'on mène par ces derniers points

des plans horizontaux, ils couperont la sphère suivant deux cercles qui ont pour projections horizontales, un cercle unique du diamètre connu 5v6, ou 7z8 (fig. 3). Ce cercle (fig. 1) est coupé par les perpendiculaires vV, zZ à XY, aux points V et Z, qui sont les projections horizontales des points π , π' de la sphère.

Élevant les perpendiculaires Vv', Zz' à XY, les distances des points v', z' (fig. 2) au diamètre horizontal bc, sont égales entre elles, et égales aux distances connues des points v, z (fig. 3) au diamètre horizontal 1.a'.2; d'où il suit que les points v', z' (fig. 2) de l'ellipse e'f'gh sont déterminés, et que, pour ces points, les tangentes à cette ellipse sont parallèles à la verticale (A, A'a).

Les points v et v', ou z et z' (fig. 3 et 2) étant les projections verticales d'un point du cercle de séparation d'ombre et de lumière sur la sphère, les plans horizontaux 5v6, 7z8 (fig. 3) menés par les points v, z du plan vertical X'Y, ont pour traces sur le plan vertical XY, des horizontales v'v', z'z' (fig. 2) qui coupent la verticale A'a aux points v', z', dont les distances au centre a sont égales entre elles et de même longueur que les perpendiculaires abaissées du point a' (fig. 3) sur les horizontales 5v6 et 7z8 de ce plan.

3° Construction des points e', f' de l'ellipse e'f'gh (fig. 2), pour lesquelles les tangentes sont horizontales.

135. Les plans horizontaux menés par les points e, f (fig. 3) du plan vertical X'Y coupent la sphère suivant deux petits cercles du diamètre f ω , dont la projection horizontale est un cercle de même diamètre décrit du point A comme centre; ce dernier cercle est coupé par la parallèle AD (fig. 1) à la projection horizontale L du rayon de lumière aux points E, F; les points (E, e), (F, f) (fig. 1 et 3), ont par hypothèse pour projections verticales sur le plan XY, les points e', f'; donc si l'on prend aq' ou a' (fig. 2) égale à a'e ou a'e' (fig. 3), les horizontales e'e', q'f' (fig. 2), et les perpendiculaires Ee', Ff' à XY se rencontreront aux points e', f' de l'ellipse projection du grand cercle de séparation d'ombre et de lumière sur la sphère. Mais les tangentes aux points (E, e), (F, f) de ce grand cercle sont horizontales; donc leurs projections f'q', e'e' sur le plan vertical XY le sont aussi.

Considérant le grand cercle de séparation d'ombre et de lumière sur la sphère, comme la base d'un cylindre droit dont les arêtes sont parallèles au rayon lumineux (L, l), l'ellipse g. 10. 11. 12, intersection de ce cylindre par le plan horizontal de projection, est le contour de l'ombre portée par la sphère sur ce plan. On construit chaque point de cette ellipse, en menant un rayon lumineux par un point de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, et en prolongeant ce rayon jusqu'à ce qu'il coupe le plan horizontal.

DE L'OMBRE DU PUIT OU TROU DE LOUP. (Pl. 3. O.)

136. Le puits militaire est une excavation qui a la figure d'un cône tronqué renversé. On donne au diamètre supérieur vingt décimètres, à l'inférieur trois, et à la hauteur, ou à la distance des deux bases circulaires, dix-sept décimètres. Les terres qui proviennent du déblai se relèvent sur les lèvres du puits avec un talus suffisant pour qu'elles ne retombent pas. Dans le fond de chaque puits, on enfonce un piquet d'un mètre en longueur, pointu à l'extrémité supérieure. Pour employer les puits militaires à la défense des ouvrages fortifiés, on les dispose par trois ou quatre rangs parallèles en quinconce. Ayant tracé des triangles équilatéraux de sept mètres de côté, les extrémités et les milieux de ces côtés sont les centres des puits. Les terres relevées dans les intervalles des puits achèvent de rendre le terrain assez irrégulier pour que les troupes, infanterie ou cavalerie, ne puissent pas s'y former. (Voyez le *Traité d'art militaire* de M. Gay de Vernon. Paris, 1805.)

Avant de tracer les ombres du puits conique (*fig. 1*), nous considérerons deux autres excavations, l'une hémisphérique (*fig. 2*), et l'autre cylindrique (*fig. 3*).

De l'excavation hémisphérique. (Fig. 2, pl. 3. O.)

137. Soit (A, a) (*fig. 2*) le centre du cercle horizontal BDEF; ayant mené par ce centre un rayon de lumière (AL, al), le plan vertical qui passe par ce rayon, contient l'horizontale XY du terrain, et le demi-grand cercle *bed* de l'excavation. Le bord BDEF du creux hémisphérique porte ombre dans l'intérieur de l'hémisphère, et pour en déterminer le contour, il faut considérer le cercle horizontal BDEF de la sphère comme la base d'un cylindre dont les arêtes sont parallèles au rayon de lumière; or ce cylindre coupera la sphère, suivant un autre grand cercle (art. 206, liv. I^{re}), dont le plan passera par les points E, F du troisième grand cercle qui serait, sur la sphère, la ligne de séparation d'ombre et de lumière; mais ces points sont les extrémités du diamètre EF perpendiculaire au diamètre BD du cercle horizontal BDEF; donc le grand cercle, intersection de la sphère et du cylindre, est dans un plan perpendiculaire au plan vertical AB ou XY; mené par le centre de la sphère parallèlement au rayon de lumière. Pour déterminer la trace *ac* de ce plan sur le plan vertical XY, il suffira de mener par le point *b* une parallèle *bc* à la droite *al*; cette parallèle coupe le demi-cercle *bed* au point *c*, par lequel on mène la trace *ac*.

Le plan de l'ombre du bord EBF dans l'intérieur de l'hémisphère, ayant

pour traces sur le plan horizontal la droite EF, et sur le plan vertical la droite *ac*, il coupe l'hémisphère suivant un demi-grand cercle dont la projection horizontale est la demi-ellipse ECF. Cette ellipse a pour grand axe le diamètre EF, et pour demi-petit axe la droite AC, projection horizontale du rayon *ac* du cercle *bcd*. Prenant sur le cercle horizontal BDEF un point quelconque (M, *m*), et menant par ce point une parallèle (MN, *mn*), au rayon de lumière, la droite *mn*, projection verticale de ce rayon, coupe la droite *ac* au point *n*, d'où l'on abaisse la perpendiculaire *nN* à XY, qui coupe les droites MN, M'N' parallèles à AB, aux points N, N' de l'ellipse ECF. Le cercle (ECF, *ac*), partage l'hémisphère en deux parties (BCEF, *abce*), (DECF, *adc*), l'une dans l'ombre, et l'autre éclairée.

De l'excavation cylindrique. (Fig. 3, pl. 3. O.)

138. Soit BDEF, le cercle horizontal, base d'un cylindre vertical, dont la section par le plan vertical BAD parallèle au rayon de lumière, est le parallélogramme *bb'dd'*, dans lequel on a $bd = b'd' = BAD$ diamètre du cercle BDEF. Le cylindre qui a pour base ce cercle, et dont les arêtes sont parallèles au rayon de lumière (AL, *al*), pénètre le cylindre vertical suivant une courbe plane (art. 207, liv. 1^{er}), dont le plan passe par les points E, F des droites verticales qui forment sur le cylindre la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Mais ces points sont les extrémités du diamètre EF perpendiculaire au diamètre BD du cercle horizontal BDEF; donc l'ombre portée par ce cercle sur le cylindre vertical, est dans un plan perpendiculaire à celui du parallélogramme *bb'dd'*. Pour déterminer la trace *ac* de ce plan, il suffit de mener la parallèle *bc* à la projection verticale *al* du rayon de lumière; cette parallèle coupe la droite *dd'* au point *c* de la droite *ac*.

Le plan de l'ombre du bord EBF dans l'intérieur du cylindre, ayant pour traces sur le plan horizontal la droite EF, et sur le plan vertical la droite *ac*, il coupe le cylindre vertical (EBDF, *bb'dd'*) suivant la portion d'ellipse (EDF, *ac*). La partie du creux cylindrique au-dessous du plan de l'ellipse est dans l'ombre; la partie au-dessus reste éclairée.

Du puits militaire. (Fig. 1, pl. 3. O.)

139. Soit BCDE (fig. 1) le cercle qui est la section du puits par le plan du sol qu'on suppose horizontal. Un plan vertical CAE, mené par le sommet (A, *s*), du cône qui forme l'intérieur du puits, coupe ce cône suivant le trapèze C'Efg, dont le côté C'E est sur la droite XY, intersection des deux plans de projection, l'un horizontal, et l'autre vertical. La parallèle au rayon de

lumière, menée par le sommet (A, s) , du cône tronqué, coupe le plan horizontal ou le plan du sol au point (H', H) . Les tangentes HI, HK au cercle $BCDE$, menées par le point H , déterminent les droites AI, AK , projections horizontales des arêtes qui séparaient sur le cône en relief, l'ombre de la lumière. La portion IBK du cercle $BCDE$, comprise entre les points de contact I et K , porte ombre dans l'intérieur du puits, et pour construire le contour de cette ombre, on se sert d'un second plan vertical LAD , mené par le sommet (S, s) , du cône parallèlement au rayon de lumière. La section du puits par ce plan est (*fig. 1.a*), le trapèze $bdf'g'$.

Le contour de l'ombre portée par le cercle $BCDE$ dans l'intérieur du puits, est une courbe plane (art. 207, liv. 1^{re}); mais les points I et K du cercle $BCDE$ appartiennent en même temps à la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le cône du puits vu extérieurement, et à l'ombre portée par ce cercle sur le même cône vu intérieurement; donc la droite IK est dans le plan de cette ombre portée. Or, cette droite IK est perpendiculaire au plan de la *fig. 1.a*; donc le plan de l'ombre lui est aussi perpendiculaire. Ces deux plans ont pour intersection commune la droite im (*fig. 1.a*), dont le point i est déterminé par la rencontre des deux droites KI, XY' . On trouve le point m en menant par le point b (*fig. 1.a*), la parallèle bm au rayon de lumière $s'l$, qui coupe la droite $s'd$ au point m . Le rayon $s'l$ passe par le sommet s' du cône tronqué; la droite $f'g'$ est un diamètre de la petite base de ce cône égal à la droite fg (*fig. 1*).

Le plan de l'ombre (IK, im), a pour traces, sur les plans des bases du cône tronqué, les droites IK, NN' , cordes des cercles concentriques $BCDE, FGFG'$; il coupe le cône suivant une ellipse qui serait projetée sur le plan horizontal suivant une autre ellipse $INMN'K$, dont le sommet M est sur la perpendiculaire Mm à $X'Y'$ ou à la droite LAD . Mais parce que le cône est tronqué, et qu'il se termine au plan horizontal $f'g'$ (*fig. 1.a*), la projection horizontale du contour de l'ombre sur le cône tronqué, se compose des deux branches égales d'ellipses IPN, KPN' , qui se terminent aux points N, N' de la projection $FFGG'$ de la petite base du cône tronqué. La corde NN' , prolongée, passerait par le point n (*fig. 1.a*), de la droite $f'g'$.

Menant par les points N, N' des parallèles NS, NT à la droite AL , qui coupent le cercle $BCDE$ aux points S, T , l'arc SBT de ce cercle porte ombre sur le plan de la petite base du cône tronqué. L'ombre du cercle $(BCDE, XY)$ sur un plan parallèle à celui de ce cercle, est un autre cercle de même rayon que le premier, dont on détermine le centre, en menant par le point (A, A') une parallèle $(AO, A'o)$ au rayon de lumière. Cette parallèle coupe le plan horizontal fg de la petite base du cône au point (O, o) de la droite LAD prolon-

gée. L'arc NN' , décrit du point O comme centre avec un rayon ON ou ON' , (égal à AB ou AD), forme avec les portions d'ellipse IPN , KPN' la projection horizontale du contour, de l'ombre portée par l'arc IBK du bord supérieur du puits dans l'intérieur de ce puits.

Construction d'un point quelconque (P, p) (fig. 1), ou (P, p') (fig. 1, 1.a) du contour de l'ombre portée dans l'intérieur du puits conique par le bord supérieur.

140. Il y a deux manières de construire ce point : ou en considérant le contour de l'ombre comme l'intersection d'un cylindre et d'un cône, ou comme la section d'un cône par un plan donné. Ayant mené par le sommet du cône (A, s), une parallèle au rayon de lumière qui coupe la base commune du cône et du cylindre au point (H, H'), et par cette parallèle une suite de plans coupants, les traces de ces plans passeront par le point H . Soit HR , l'une quelconque de ces traces, qui coupe le cercle $BCDE$ aux points R et Q ; la parallèle au rayon de lumière, menée par le point Q , et l'arête du cône menée par le point R , se coupent au point (P, p) , ou (P, p') . Le point P est l'intersection de la droite AR , projection horizontale d'une arête du cône, et de la droite QP , projection horizontale de l'arête du cylindre de lumière qui a pour base le cercle $BCDE$, ces deux arêtes du cône et du cylindre étant dans le plan dont la trace horizontale est HQR .

En menant une autre trace $HQ'R'$, la droite AR' et la parallèle $Q'P'$ à QP , se couperaient au point P' de l'ellipse IMK . On trouverait encore ce point (P', p') du contour de l'ombre, en le considérant comme appartenant à la section du cône par le plan (IK, in) , (fig. 1.a).

Menant par un point quelconque (Q', q') du cercle $BCDE$, une parallèle $(Q'P', q'p')$ au rayon de lumière, la droite $q'p'$ coupe la trace inm au point p' , d'où l'on abaisse la perpendiculaire $p'\pi'$ sur XY (fig. 1.a); cette perpendiculaire prolongée, rencontre les droites QP , $Q'P'$ parallèles à LBD , aux points P et P' . Élevant la perpendiculaire $P\pi$ à XY , et faisant $\pi p = \pi'p'$ (fig. 1.a), le point p sera la projection verticale (fig. 1) du point (P, p') (fig. 1.a).

De la tangente en un point P ou P' de l'ellipse IMK .

141. Les traces horizontales des plans tangents au cône et au cylindre au point (P, p') de leur intersection, sont les tangentes $Q'q$, $R'q$ du cercle $BCDE$, menées par les points Q' , R' : or ces traces se coupent en q ; donc la droite $P'q$ est la tangente au point P' de l'ellipse IMK . Aux points I et K de cette ellipse, les plans tangents du cône et du cylindre se confondent ; mais le plan tangent

au point I sera coupé par le plan (IK, $ip'nm$) suivant une droite, dont la projection horizontale IU sera la tangente au point I de l'ellipse. Le plan tangent qui a pour trace horizontale la droite HI, est coupé par le plan horizontal $f'g'$ ou fg , suivant la tangente $\downarrow U$ du petit cercle $FF'GG'\downarrow$, parallèle à la tangente HI du cercle BCDE; or ce plan horizontal coupe le plan (IK, $ip'nm$) suivant l'horizontale NN'U; donc l'intersection des deux horizontales $\downarrow U$, NN'U détermine le point U de la tangente IU. Prolongeant la droite NN' en V, et prenant $N'V = NU$, la droite KV est la tangente au point K.

Ayant la projection horizontale IPNN'PK du contour de l'ombre portée dans l'intérieur du puits, par le bord circulaire et supérieur de ce puits, et une projection verticale (*fig. 1.a*) de ce même contour, il sera facile d'en déduire la seconde projection verticale sur le plan XY. Les points i, p, m' de cette projection, correspondent aux points I, P, M de la projection horizontale, et aux points i, p', m , (*fig. 1.a*). On pourrait se dispenser de construire la partie ponctuée $m'z$ de la projection verticale (*fig. 1*), qui est au-dessous de l'horizontale fg ; mais en la construisant, il faut observer que le point z où elle est touchée par la droite sE' , est un peu au-dessous de l'horizontale fg , projection de la petite base du puits.

OMBRES DE LA NICHE SPHÉRIQUE. (Pl. 4. O.)

142. La surface intérieure d'une niche sphérique est formée d'un cylindre vertical, qui a pour base un demi-cercle horizontal, et d'un quart de sphère de même rayon que ce cercle, qui termine la partie cylindrique.

Soit (*pl. 4. O.*) ABCD le demi-cercle base du cylindre de la niche sphérique; un plan vertical AB coupe cette niche suivant la *fig. A'B'abe*, composée des deux verticales égales $A'a, B'b$, et d'un demi-cercle $ae'b$ tangent à ces deux verticales aux points a et b . Cette figure est tracée sur le plan vertical XY parallèle au plan AB. La direction du rayon de lumière est déterminée par ses deux projections p, p' , ou par les deux droites CH, ce , projections du rayon qui passe par le centre (C, c) de la sphère.

L'arête verticale (A, A'a) porte ombre dans l'intérieur de la niche; le plan vertical AD de cette ombre coupe le cylindre de la niche suivant l'arête (D, D'd). L'ombre du point (A, a) est (D, d'); la parallèle D'a' à ad' coupe la droite A'a au point a' ; d'où il suit que l'ombre (D, D'd) est portée par la portion (A, aa') de l'arête verticale du cylindre, dont la projection horizontale est le point A. Elle est suivie de l'ombre portée par le demi-cercle bae sur le cylindre vertical. Ce demi-cercle touche la verticale (A, A'a) au point a ; or les

projections orthogonales ou obliques de deux lignes qui se touchent, sur une surface quelconque, seront encore réciproquement tangentes; donc, quelle que soit la projection verticale dgk de l'ombre portée par le demi-cercle aeb sur le cylindre vertical ABD , cette courbe dgk sera tangente en un point d à la verticale $D'd$.

Pour déterminer la portion du demi-cercle (AB, aeb) qui peut porter ombre ou sur le cylindre, ou sur la sphère de la niche, on mène une tangente au demi-cercle aeb , parallèle à p' ou à la droite ce . Le point de contact i détermine la portion aei du demi-cercle aeb , qui peut porter ombre sur les deux surfaces intérieures de la niche.

Le rayon de lumière mené par un point quelconque (F, f) du demi-cercle, coupe le cylindre vertical ABD au point (G, g) , dont la projection verticale g appartient à la courbe dgk .

143. Pour trouver l'ombre portée par le demi-cercle aeb de la sphère sur elle-même, on regarde le plan de ce cercle comme horizontal, et on rapporte le rayon de lumière à un nouveau plan vertical $e'e'i$ parallèle à p' ou à ce ; alors le problème proposé ne diffère pas de celui qu'on a déjà résolu (art. 137) pour le creux sphérique.

Regardant la droite ce comme une projection horizontale du rayon de lumière, on construit l'angle ech que le rayon ch fait avec sa projection ce , et on projette en c', e' les points c, e , sur la parallèle $e'e'i$ à ce . Du point c' comme centre avec $c'e' = ce$, pour rayon, on décrit un demi-cercle $e'h'i$, et on mène la parallèle $c'h'$ à ch , qui coupe ce demi-cercle en h' . L'ombre portée par le grand cercle $(aeb, e'e'i)$ dans l'intérieur de la sphère est un autre grand cercle, dont la trace sur le plan du premier est cc' . Ce second grand cercle a pour trace sur le plan vertical $e'h'i$ auquel il est perpendiculaire, la droite $c'h'$; sa projection sur le plan du cercle abe , est une ellipse. La portion iqk de cette ellipse a son origine au point i , intersection du demi-cercle aeb et de la droite cc' ; l'extrémité k est la projection de l'intersection du cercle horizontal abe et du cercle incliné contenu dans le plan des droites $cc', c'h$. Pour construire ce point k , on élève la perpendiculaire bb' à $e'e'i$, qui coupe la droite $c'h'$ au point m ; portant la distance $b'm$ en bm' sur la droite $B'b$ prolongée, et tirant la droite em' , cette droite coupe le cercle aeb au point n du cercle horizontal aeb , dont le plan a tourné autour de l'horizontale ab , pour venir s'appliquer sur le cercle aeb . La perpendiculaire nk à l'horizontale ab coupe cette horizontale au point k . Élevant la perpendiculaire kl à cic' , qui coupe le cercle aeb au point l , le demi-cercle aeb est divisé au point l en deux arcs, l'un ael , qui porte sur la partie cylindrique de la niche, l'ombre dont la projection verticale est la courbe dgk ; l'autre li qui porte sur la partie sphérique.

l'ombre dont la projection verticale est l'arc d'ellipse iqk . Un point quelconque (p, p') de l'arc li porte une ombre située sur le rayon de lumière $(pq, p'q')$ qui est rapporté aux plans des cercles aeb et $c'h'i'$; or la projection $p'q'$ de ce rayon coupe la droite $c'h'$ au point q' ; donc la perpendiculaire $q'qs$ à $b'c'i'$ coupe la parallèle pq à ce , au point q de l'arc d'ellipse iqk .

Les plans tangens de la sphère aux points (p, p') , (q, q') passent (art. 116) par un point r de la droite $cr'c'$; or cette droite est la trace du plan du cercle aeb , et du plan de l'ombre dont la projection verticale est iqk ; donc le point r appartient à l'intersection de ces deux plans, et par conséquent à la droite rq , qui est la tangente de la courbe iqk au point q de cette courbe. Une construction semblable donne la tangente ko au point k ; il suffit de mener, par le point l , la tangente lo au cercle aeb . Cette tangente lo coupe la droite cc' au point o , par lequel on mène la tangente ok de l'arc d'ellipse iqk . Cette droite ok est aussi tangente à la courbe kgd , parce que cette courbe et l'arc d'ellipse sont des projections obliques d'un cercle vertical sur deux surfaces, savoir le cylindre et la sphère de la niche, qui se touchent suivant le cercle horizontal commun à ces deux surfaces.

Conclusion.

144. Le contour de l'ombre portée par le bord extérieur de la niche, dans l'intérieur de cette niche, se compose 1^o d'une verticale ($D, D'd$); 2^o d'une courbe à double courbure (DGK, dgk) intersection de deux cylindres; 3^o d'un arc de cercle (KQl, kqi), dont la projection horizontale KQl se déduit de la projection $c'k'$ sur le plan du cercle $c'h'i'$. Les points K et l résultent de l'intersection des perpendiculaires Kk et il à XY , et des lignes AB , ABD du plan horizontal. Quant au point Q , qui correspond à un point quelconque q de la projection verticale, on l'obtient en menant la perpendiculaire qS à XY , qui coupe la droite AB au point S , et en portant sur cette perpendiculaire la droite $SQ = sq'$, distance du point q' à la droite $c'c'i'$ du plan de projection auxiliaire.

L'ordre que nous avons suivi pour faire connaître les ombres de la niche, est l'inverse de celui qui convient au tracé du contour de ces ombres; ainsi l'on construira d'abord l'ombre (KlQ, kig) du bord de la sphère sur elle-même, ce qui donnera le point k , l'une des extrémités de la courbe kgd , et la tangente ko en ce point. Connaissant d'ailleurs l'autre extrémité d et la tangente $D'd$ en ce point d , on déterminera les points intermédiaires, tels que g , de cette courbe kgd , qui est la projection verticale de l'ombre portée par le bord circulaire de la niche sur la partie cylindrique de cette niche.

OMBRES DU PONT. (Pl. 5. O.)

145. Le dessin du pont que nous allons expliquer comprend des exemples 1° d'ombres portées par des droites et des cercles sur des surfaces planes ou cylindriques; 2° de lignes de séparations d'ombre et de lumière sur des cylindres. Ce dessin se compose des trois parties ordinaires, *plan*, *élévation*, *coupe*, qui font connaître la forme et les dimensions de la première arche d'un pont en plein cintre, adossée à un mur de quai. L'élévation et la coupe sont réunis sur la même figure. Les hachures à lignes parallèles ont pour objet de distinguer les parties du pont qui sont dans l'ombre.

Explication du dessin. (Pl. 5. O. Fig. 1 et 2.)

La droite AA' du *plan* (*fig. 1*) représente la face verticale du mur de quai; l'arche adossée à ce mur est comprise entre les deux plans verticaux $BC, B'C'$, perpendiculaires aux plans $AB, A'B'$: XY sépare le plan de l'élévation (*fig. 2*). Le plan vertical $X'Y'$ parallèle au mur de quai passe par le milieu de l'arche, et coupe le pont suivant la figure que nous allons décrire.

De la coupe du pont.

Cette coupe (*fig. 2*) se compose de l'horizontale dd' , arête la plus élevée du plein-cintre de l'arche, 1° des deux verticales $bd, b'd'$; 2° de deux autres verticales $fg, f'g'$ réunies aux premières par les arcs convexes $bf, b'f'$, limites des parapets $bfg, b'f'g'$; 3° de deux horizontales $gh, g'h'$ égales à la largeur de chaque trottoir; 4° de deux obliques $kl, k'l'$ en pente vers le trottoir pour former les ruisseaux; 5° de l'arc convexe kk' , section de la chaussée.

Les lignes en saillie sur chacun des plans verticaux $BD, B'D'$ (*fig. 1*) appartiennent au bandeau du parapet et à la corniche de l'arche. Les bandeaux des parapets, les corniches de l'arche, les trottoirs se continuent en retour le long du mur du quai, avec les mêmes dimensions en largeur et en hauteur; en plan, (*fig. 1*) les parapets se terminent aux lignes MN, NO à gauche de l'arche, et aux lignes $M'N', N'O'$ à droite de la même arche.

Les deux lignes pleines en avant des droites AB, BC , ou $A'B', B'C'$, et respectivement parallèles à ces droites, appartiennent aux bandeaux des parapets et aux corniches. Une ligne ponctuée en avant de AB ou de $A'B'$ marque la saillie d'un socle du mur du quai, dont la hauteur est la distance Xx *fig. 2*, des horizontales XY, xy . Le plan horizontal xy est le plan des naissances du berceau cylindrique, et la distance dq des deux horizontales dd', xy est égal au rayon du plein-cintre de l'arche.

XY' étant par hypothèse le plan qui divise l'arche en deux parties égales dans le sens de la longueur, et TT' celui qui la divise en deux autres parties égales dans le sens de la largeur, on prend $ST = ST' = dq$ rayon du plein-cintre, et les naissances des pleins-cintres sont les droites intersections des deux plans verticaux QTQ' , $Q''T''Q'''$ *fig. 1*, par le plan horizontal xy *fig. 2*.

Du raccordement du mur de quai et de la première arche, par des éperons à chapiteaux coniques.

146. Du point B (*fig. 1*) comme centre avec BQ pour rayon, on décrit le quart de circonférence $Q\gamma$ qui se termine aux deux droites rectangulaires marquées sur le plan AB et BDC; cet arc est la section horizontale du fût de l'éperon; la naissance de ce fût est dans le plan horizontal xy . La base de l'éperon se compose de deux socles, dont chacun n'a que la moitié de la hauteur du socle du mur de quai. La saillie du premier socle sur le fût de l'éperon est égale à la saillie du socle principal qui règne le long du mur de quai.

En avant de l'arc $Q\gamma$ du plan, on voit les trois arcs concentriques, intersections horizontales des deux socles du fût de l'éperon, et de la partie cylindrique du chapiteau de cet éperon.

A droite de l'arche, dans l'angle $Q'B\pi'$, il y a un second éperon en tout égal au premier.

Les deux parallèles à QQ' en avant de cette droite, sont tangentes aux arcs de cercle, sections horizontales des socles des deux éperons; ces socles se terminent à la face verticale du socle du mur de quai.

La *fig. a* représente sur une plus grande échelle le plan et l'élévation de l'éperon à droite de l'arche; elle fait voir les lignes $B'A'$ et $B'C'$ du nu des murs de quai et de l'arche. La droite $q\gamma$ est sur cette figure la trace de la face verticale du socle du mur de quai, et les deux arcs u, u' , sections horizontales des socles de l'éperon, se terminent d'une part à la face verticale $B'C'$ de l'arche, et de l'autre à la droite $q\gamma$. La droite $B'A'$ (*fig. a*) sépare le plan de l'élévation; elle tient lieu de la droite XY sur la *fig. 2* de l'élévation générale. L'horizontale xy (*fig. a*) représente le plan des naissances du berceau de l'arche, comme sur la *fig. 2*.

Le pont que l'on vient de décrire est, par hypothèse, éclairé par des rayons de lumière parallèles entre eux; il s'agit de trouver les ombres portées sur les diverses parties qui le composent, p et p' (*fig. 1* et *2*) étant les deux projections d'un rayon lumineux.

Des ombres du pont.

147. En allant de gauche à droite, et suivant le mur de quai, les ombres dont on demande le contour, sont, en les désignant par les lettres A, B, C, etc.

1^o *Ombres A.* Ombres de la corniche du mur de quai, sur elle-même ou sur le nu du mur; ombres du parapet qui termine le mur, sur le trottoir adjacent et sur le nu du mur; ombres du trottoir du mur de quai sur la chaussée parallèle à ce mur.

2^o *Ombres B.* Ombres du parapet du pont sur le trottoir de ce pont; ombres du trottoir sur la chaussée du pont.

3^o *Ombres C.* Ombres de la coupe transversale DD' (*fig. 1*) du pont; (le plan de cette coupe, parallèle au mur de quai, divise l'arche en deux parties égales; la droite DD' et les droites QQ', qq' (*fig. 1* et 2) sont de même longueur, comme parallèles comprises entre les parallèles BCD, B'C'D'.)

4^o *Ombres D.* Ombres des pleins-cintres de l'arche ou des quarts de cercle DQ, D'Q' (*fig. 1*) sur le berceau cylindrique de l'arche, et sur le fût Q'Bπ' de l'éperon, à droite de l'arche.

5^o *Ombres E.* Lignes de séparation d'ombre et de lumière sur le fût Q'Bπ' (*fig. 1*) de l'éperon, et sur les socles de la base de cet éperon.

6^o *Ombres F.* Ombres des socles de l'éperon à droite de l'arche sur la face verticale du mur de quai; ombres du chapiteau de l'éperon à gauche de l'arche, sur le fût de la pile.

Tracé des ombres A et B.

148. Construisons d'abord sur les deux plans verticaux SVT', SVD' (*fig. 1*) les projections d'un rayon de lumière qui passe par le milieu (S, s), de la chaussée du pont. Ayant mené SU parallèle à p , et su' parallèle à p' , on abaisse d'un point quelconque U de SU, les perpendiculaires UU', UV, sur SV' et SV, et du point S comme centre, avec SV pour rayon, on décrit l'arc VV' qui coupe la droite SU' au point V'. Il est évident que la projection du point (U, u'), sur le plan vertical SV, ramené sur le plan vertical SV', est le point (V', v'); d'où il suit que les projections d'un rayon de lumière sur les deux plans verticaux SV', SV sont respectivement parallèles aux droites su' , sv' (*fig. 2*), cette dernière étant ramenée par un quart de révolution sur le premier plan vertical SV'.

L'horizontale (NO, f) qui termine le parapet du pont, porte ombre sur le

trottoir, et pour la déterminer, on conçoit par un point (F, f) de cette horizontale un rayon de lumière, dont la projection verticale fz , parallèle à su' ou sv , coupe l'horizontale gh du trottoir au point z , par lequel on mène la parallèle zLL' à NO . Le profil du parapet du mur de quai étant le même que pour le parapet du pont, la parallèle $f'k'$ à sv' , coupe l'horizontale gh au point k' distant du point g de la largeur $g'k'$ de l'ombre portée sur le trottoir du mur de quai. Portant cette largeur sur le plan (*fig. 1*) de M en L' , et tirant $L'L$ parallèle à MN , on aura $L'LONM$ pour la projection horizontale (*fig. 1*) de l'ombre des parapets du pont et du mur de quai, sur leurs trottoirs respectifs.

Une parallèle à la projection sv' (*fig. 2*) du rayon lumineux, menée par un point de l'horizontale inférieure du bandeau du parapet du pont, coupe la face extérieure du parapet, en un point qui détermine l'horizontale 1.2 (*fig. 2*). Cette horizontale est le contour de l'ombre portée par le bandeau du parapet du mur de quai, sur le nu de ce mur.

La corniche du parapet se compose d'une plate-bande, d'un filet et d'un cavet. D'après la direction du rayon lumineux (s, s'), l'horizontale inférieure de la plate-bande met dans l'ombre le filet et le cavet; elle porte ombre sur le nu du mur de quai, et une parallèle à sv' (*fig. 2*), menée par l'extrémité de la verticale qui est la projection de la plate-bande de la corniche du parapet, coupe la face verticale extérieure de ce parapet en un point qui détermine comme précédemment l'ombre portée (3.4) par la corniche du mur de quai sur le nu de ce mur.

Le trottoir du pont porte ombre ou sur la chaussée ou sur le ruisseau de cette chaussée. Le contour de cette ombre est une horizontale parallèle à l'horizontale (HH', h) qui termine le trottoir. Menant par le point h (*fig. 2*) une parallèle à chacune des droites su' , sv' , les deux parallèles rencontrent le profil de la chaussée en deux points, qui déterminent les distances respectives des droites 5.6, 5.6' (*fig. 1*) aux droites HH' , HH'' .

Ombres C.

149. Le plan de la section transversale DD' (*fig. 1*) du pont, coupe le berceau de l'arche suivant une horizontale (DD', dd'). L'ombre portée par cette horizontale sur le berceau, est une autre droite horizontale, arête de ce berceau. Ces deux droites sont dans un plan parallèle au rayon de lumière, perpendiculaire au plan vertical DQ du plein-cintre. Ayant décrit du point D comme centre, avec DQ pour rayon, l'arc QR , on transporte la droite DR en qr (*fig. 2*) sur xy , et du point q comme centre, avec $qr = DR$ pour rayon, on

décrie l'arc $d7r$, qui représente le quart du plein-cintre de l'arche. La projection du rayon de lumière sur le plan de cet arc, est parallèle à la droite $v's$; donc si l'on mène par le point d , extrémité de l'horizontale dd' , une parallèle $d7$ à $v's$, cette parallèle coupera l'arc $d7r$ au point 7, qui détermine l'horizontale 7.8, projection verticale de l'ombre portée par l'arête (DD' , dd') du berceau sur ce berceau même. Cette projection a son origine au point e , qu'on obtient par l'intersection de la droite connue 7.8, et de la parallèle à ρ' ou su' , menée par le point d . Abaisant la perpendiculaire eE à XY , et menant la parallèle DE à la projection horizontale ρ du rayon de lumière, elles se rencontrent au point E , projection horizontale de l'origine (E , e) de l'ombre portée par l'horizontale (DD' , dd') sur le berceau de l'arche. Cette horizontale porte aussi des ombres sur le cylindre vertical de la pile à droite de l'arche, et sur la face verticale EE'' du socle du mur de quai. Les rayons de lumière (DE' , de), ($D'E'$, $d'e'$) coupent cette face verticale EE'' aux points (E' , e'), (E' , e'). Le second point est l'extrémité de l'ombre portée par l'horizontale (DD' , dd') sur le socle du mur de quai. La projection verticale de cette ombre se trouve (*fig. 2*) sur l'horizontale menée par le point e' ou e .

Le même rayon ($D'E'$, $d'e'$), prolongé jusqu'au nu du mur $A'B'$, le rencontrerait au point dont e' est la projection verticale. La verticale $e'B''$ qui contient l'ombre de la verticale (D' , $d'b'$), coupera l'horizontale xy en e' . Menant par ce point la parallèle $e'e$ à ρ' , et la prolongeant jusqu'au point e de la verticale $d'b'$, ed' sera la projection verticale de la portion de la coupe extérieure du parapet, qui porte ombre sur le socle du mur de quai. Le reste de cette coupe porte ombre sur le nu du mur. La parallèle $b'b''$ à ρ' , menée par le point b' , rencontre la verticale $e'B''$ au point b'' , origine du contour de cette ombre. Ce contour ne différerait pas du profil $d'b'$ du parapet, s'il n'était modifié par les ombres des horizontales du bandeau du parapet et de la saillie de la corniche, comprises entre les plans verticaux $D'XY'$ et $D'E'$. Ainsi l'horizontale supérieure de la corniche porte sur le mur de quai, l'ombre zz' parallèle à $b'b''$ ou à ρ' .

Ombres D.

150. Le cylindre qui a pour base le quart (DQ' , dq) du plein-cintre de l'arche, et pour arêtes des parallèles au rayon de lumière, coupe le berceau horizontal suivant une courbe plane (art. 207, liv. 1^{er}). La détermination de cette courbe est un problème tout-à-fait semblable à celui (art. 138) du puits cylindrique, et qu'on résout de la même manière. $d7$ (*fig. 2*) étant la projection d'un rayon de lumière sur le plan du plein-cintre $d7r$, on mène la parallèle 9.10 à cette projection, qui touche l'arc $d7r$ au point 11, et détermine

sur cet arc la portion $d.11$ qui porte ombre sur le berceau. Le point 11 , origine de l'ombre portée, ayant pour projection verticale (*fig. 2*) le point 12 de la verticale dq , la projection verticale du contour de cette ombre, sera la courbe $12.\mu'e$. On aura un point quelconque intermédiaire μ'' , en menant $\mu\mu'$ parallèle à $d7$, et les horizontales $\mu'\mu''$, $\mu.13$. L'horizontale $\mu.13$ coupe la verticale dq au point 13 , par lequel on tire la parallèle $13.\mu''$ à de ou ρ' , qui coupe l'horizontale $\mu'\mu''$ au point μ'' de la courbe $12.\mu'e$. Le plan de cette courbe a pour trace sur le plan de l'arc $d.11$, la droite $q.11$.

*Des tangentes à la courbe $12.\mu'e$ (*fig. 2*), projection de l'ombre portée par l'arc du plein-cintre d'une arche, sur le berceau de l'arche.*

151. La courbe $12.\mu'e$ a pour tangente à l'une de ses extrémités e la droite de , parallèle à ρ , ou à $u's$. En effet, cette droite de est la trace d'un plan tangent au cylindre, qui a pour arêtes les rayons de lumière menés par le cintre de l'arche : or ce plan est perpendiculaire au plan vertical de projection XY , et d'ailleurs la courbe dont $12.\mu'e$ est la projection verticale, appartient au cylindre; d'où il suit que cette courbe a pour tangente au point e la droite ed .

Autrement; les plans tangens aux cylindres, dont l'intersection est la tangente au point (E, e) , ont pour traces sur le plan de l'arc $d.11$, les deux tangentes à cet arc $d7'$, $7'7$ qui se croisent au point $7'$ de la droite $q.11$, perpendiculaires à la corde $d7$ de l'arc $d.11$; or le point $7'$ se projette sur le plan vertical XY en d ; donc ce point d appartient à la tangente de la courbe $e2.12$, au point e de cette courbe.

Les tangentes à l'arc de cercle $d7r$ aux points μ , μ' , se rencontreraient de même au point 14 de la droite $q.11$. L'horizontale $14, 15$ coupe la verticale dq au point 15 de la droite $15.\mu''$, qui est tangente au point μ'' de la courbe $12.\mu'e$.

Cette construction ne s'applique pas au point 12 , projection verticale de l'origine de la courbe; mais on obtiendra la tangente pour ce point, en cherchant l'intersection du plan tangent au berceau au point 11 , et du plan de la courbe. Or, le plan tangent au berceau, suivant l'arête de ce berceau qui passe par le point 11 de sa base, coupe le plan vertical QQ' suivant une horizontale parallèle à l'arête de contact; le plan de la courbe coupe ce plan vertical QQ' , suivant une autre droite; l'intersection de ces deux droites détermine la tangente au point de la courbe qui se projette en 12 sur le plan vertical (*fig. 2*). En effet, la tangente $g.10.11$, rencontre la verticale rr' du plan vertical QQ' , au point 16 ; donc l'horizontale 16.17 , intersection du plan tangent

au berceau et du plan vertical QQ' , contient un point de la tangente cherchée. Mais la droite $q.11.7$, prolongée, coupe la verticale rr' au point r , qui se projette (*fig. 2*) au point r' de la verticale qd . La parallèle à la droite $q.11.r'$ du plan de l'ombre, menée par un point quelconque de cette ombre, tel que (E, e), coupe le plan vertical QQ' au point dont 18 est la projection verticale; donc la droite $r'.18$ est l'intersection du plan de l'ombre cherchée et du plan vertical QQ' ; or cette droite coupe l'horizontale 16.17 au point 17; donc la droite 12.17 est la tangente au point 12 de la courbe 12. μ . e .

L'arc en plein-cintre $Q'D'$, opposé à celui qui porte ombre sur le berceau, porte lui-même ombre sur le cylindre vertical de l'éperon à droite de l'arche. On sait (art. 109) comment on trouve l'ombre d'une ligne sur une surface. La projection verticale de l'ombre de l'arc $Q'D'$, représentée à part (*fig. a*), est marquée ab ; sa projection horizontale se confond dans ce cas particulier avec la base du cylindre, fût de l'éperon, puisque ce cylindre a pour génératrice une droite verticale.

Ombres E.

152. La perpendiculaire abaissée du point B' (*fig. 1*) sur $D'E'$ ou e , projection horizontale du rayon de lumière, coupe les trois cercles bases du fût et des deux socles de l'éperon de droite, en trois points; les verticales élevées par ces points sont, sur les cylindres du fût et des socles, les lignes de séparation d'ombre et de lumière.

La *fig. a*, qui représente l'élévation de l'éperon sur une plus grande échelle, fait voir le quadrilatère $abcd$, dans lequel les droites ad et dc , les courbes cb et ba sont respectivement les projections verticales de la base du fût de l'éperon, de la droite séparation d'ombre et de lumière sur ce fût, des ombres portées par l'horizontale de l'arche (DD', dd'), et par l'arc en plein-cintre ($Q'D', q'd'$) sur le fût de l'éperon. La parallèle au rayon de lumière (19.20), (19.20'), (*fig. 1* et 2), menée par le point (19, 19') de l'horizontale (DD', dd'), coupe le fût de l'éperon au point (20, 20'), ce qui détermine le point 20', marqué des mêmes chiffres sur la courbe rapportée (*fig. a*) en $b.20'e$.

Ombres F.

153. Le bandeau du chapiteau de l'éperon à gauche de l'arche, et les socles de l'éperon à droite, sont terminés dans la partie supérieure par des quarts de cercle. Le premier des trois cylindres qui ont pour bases ces quarts de cercle, et dont les arêtes sont parallèles au rayon de lumière, rencontre le fût de l'éperon de gauche; les deux autres se prolongent jusqu'à la face verticale

du socle du mur de quai; les lignes d'intersection sont les contours des ombres portées. On voit (*fig. a*), les deux courbes e et e' , projections verticales des ombres portées par les bords circulaires des socles de l'éperon de droite de l'arche, sur le socle du mur de quai.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on trouve les ombres portées par des lignes ou des cercles donnés, sur des corps ronds, tels que la sphère, le cône ou le cylindre. Conservant l'hypothèse d'un seul point lumineux, ou du parallélisme des rayons de lumière, nous allons construire les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur deux genres de surfaces, que nous avons nommées (art. 49 et 52, chap. I^{er}), *surfaces de révolution*, et *surfaces réglées*.

§ V. DE LA LIGNE DE SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE SUR UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION. (Pl. 6. O.)

154. Nous avons exposé (art. 116-110) trois méthodes pour déterminer le cône ou le cylindre tangent à une surface de révolution; nous allons appliquer ces méthodes au cas particulier de l'ellipsoïde de révolution, en supposant cette surface successivement éclairée par un point lumineux et par des rayons parallèles.

Soit (A, aa') (pl. 6. O), l'axe de révolution de l'ellipsoïde. Un plan méridien OAO', parallèle au plan vertical XY de projection, coupe cet ellipsoïde suivant l'ellipse $aa'oo'$. Les points E et e étant les deux projections du point lumineux, on demande sur l'ellipsoïde la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Cette ligne est la courbe de contact de l'ellipsoïde et du cône tangent qui a son sommet au point lumineux, et pour trouver un point de cette courbe, nous considérerons d'abord l'ellipsoïde comme l'enveloppe de l'espace que parcourt un cône droit dont le sommet est constamment sur l'axe de révolution.

Ayant coupé la surface de révolution par un plan X'Y' perpendiculaire à l'axe aa' , on mène une tangente à la courbe méridienne $aa'oo'$, par le point d'intersection de cette courbe et de l'horizontale X'Y'.

Cette tangente coupe l'axe aa' au point s . On prend ce point pour le sommet d'un cône droit qui touche l'ellipsoïde suivant le cercle du diamètre dd' , et tout plan tangent à ce cône est aussi tangent à l'ellipsoïde. Pour mener ce plan par le point lumineux (E, e), on joint ce point et le sommet (A, s) du cône droit, par la droite (AE, se), qui coupe le plan X'Y' du cercle base du cône droit, au point (F, f). Ayant décrit du point A comme centre, le cercle du diamètre $DD' = dd'$, la tangente à ce cercle menée par le point F, le touche aux points H, H' qui se projettent sur le plan vertical XY au

points h, h' de l'horizontale $X'Y'$ ou dd' . Les deux points (H, h) , (H', h') , appartiennent à la ligne de séparation d'ombre et de lumière de l'ellipsoïde.

155. On ferait averti que le cercle du diamètre (DD', dd') ne contient pas de points de la courbe, si le point, tel que F , était dans l'intérieur du cercle du diamètre DD' . Mais pour éviter des constructions inutiles, on cherchera d'abord la limite des cercles qui contiennent des points de la courbe du contact. Pour trouver cette limite, on mènera par le point lumineux (E, e) , les tangentes à la courbe génératrice tracée dans le plan méridien qui passe par ce point. Dans le cas particulier de l'ellipsoïde, on peut mener deux tangentes, et les cercles de la surface de révolution qui passent par les points de contact de ces deux tangentes, sont les limites des cercles qui contiennent les points de la courbe de contact du cône et de la surface de révolution.

Faisant tourner le plan méridien AE d'un arc égal à EG , pour amener ce plan dans le plan méridien $OA O'$, et le point G étant projeté en g sur l'horizontale donnée eg , on mènera par le point g deux tangentes à la courbe méridienne $adaa'o'd'$; et par les deux points de contact i, i' , on mènera des plans perpendiculaires à l'axe aa' qui couperont la surface de révolution suivant les cercles limites de la courbe cherchée : prenant les distances des points i, i' à l'axe aa' mesurées sur les horizontales $ik, i'k'$, et les portant sur le méridien AE de A en K , et de A en K' , les points qui se projettent sur le plan horizontal en K et K' , et sur le plan vertical en k et k' , sont les points extrêmes de la ligne de contact de la surface de révolution et du cône qui a son sommet au point lumineux (E, e) .

156. L'ordre des opérations graphiques n'est pas indifférent, et pour suivre celui que nous regardons comme le meilleur, on déterminera d'abord les deux points (M, m) et (M', m') , situés sur le plus grand cercle (OO', oo') de la surface de révolution. Ayant décrit du point A , comme centre, avec un diamètre $OO' = oo'$, un cercle, et considérant ce cercle comme la base d'un cylindre vertical, ce cylindre touchera la surface de révolution suivant le cercle (OO', oo') ; or les deux plans tangents à ce cylindre, qui ont pour traces horizontales les droites EM, EM' , touchent cette surface aux deux points M, m et M', m' . Donc ces deux points appartiennent à la courbe de contact du cône qui a son sommet au point (E, e) , et de l'ellipsoïde de révolution.

La courbe méridienne $(OO', aa'oo')$, peut être considérée comme la base d'un cylindre horizontal tangent à la surface de révolution; donc si l'on mène les tangentes el, el' à cette courbe, les plans tangents au cylindre qui ont pour traces ces tangentes, touchent la surface de révolution en des points (L, l) , et (L', l') , qui appartiennent encore à la courbe de contact.

Ayant déterminé les six points K, K', L, L', M, M' de la projection hori-

zontale de la courbe de contact, et les six points correspondans k, k', l, l', m, m' de la projection verticale, on trouvera les points intermédiaires par la méthode qu'on a suivie (art. 145) pour trouver les points (H, h) et (H', h') .

157. Nous avons considéré la surface de révolution comme l'enveloppe de l'espace que parcourt un cône droit qui a successivement pour arêtes les tangentes de la courbe méridienne. Maintenant nous allons substituer aux cônes, des sphères qui ont pour rayons les portions de normales à la courbe méridienne, telles que $d't$, comprises entre cette courbe et l'axe de révolution.

Soit (A, t) , le centre de l'une de ces sphères, $d't$ son rayon, $(OO', dud'v)$ l'un de ses grands cercles. Le méridien AE coupe cette sphère suivant un autre grand cercle, et en supposant ce méridien amené sur le méridien ADG , le point (E, e) prend la position g ; donc si par le point g , on mène les tangentes gu, gv au cercle $dud'v$ considéré dans le plan méridien AE , la droite uv est le diamètre du cercle de contact de la sphère et du cône droit dont le sommet est en (E, e) , ou en g . Ce cercle $dud'v$ de la sphère et le cercle dd' commun à la sphère et à la surface de révolution, se coupent suivant une droite horizontale x' , perpendiculaire au plan du méridien AE ; donc si l'on porte la distance du point x' à l'axe aa' , de A en x sur AE , cette droite horizontale sera en projection horizontale, une perpendiculaire HxH' à la trace AE du méridien qui passe par le point (E, e) . L'intersection de cette droite HxH' et du cercle décrit du point A comme centre avec un diamètre $DD' = dd'$, donnera les points H, H' de la projection horizontale de la courbe de contact cherchée.

Élevant les perpendiculaires $Hh, H'h'$ à l'intersection XY des plans de projection, et les prolongeant jusqu'à ce qu'elle coupe l'horizontale dd' aux points h et h' , ces points appartiennent à la projection verticale de la courbe de contact; on trouvera de la même manière tant d'autres points qu'on voudra de cette courbe.

158. Considérons maintenant la surface de révolution comme l'enveloppe de l'espace que parcourt un cylindre qui a pour base la courbe méridienne, et cherchons dans cette hypothèse un point de la courbe de contact de la surface de révolution et du cône qui a son sommet au point lumineux. Soit AN , la trace horizontale d'un plan méridien quelconque; (N, n) , le pied de la perpendiculaire abaissée du point (E, e) sur ce plan méridien AN . On remarquera que tous les points tels que N , se trouvent sur un cercle décrit sur AE comme diamètre. Ayant fait tourner le méridien AN jusqu'à ce qu'il ait pris la position AN' parallèle à XY , le point (N, n) se transporte en n' , sur l'horizontale en' . Par ce point n' , on mène la tangente $n'p$ à la courbe méridienne, et on porte la distance pq du point de contact p à l'axe aa' , sur la

trace AN de A en P. Le point P et son correspondant p' , situé sur l'horizontale pq , sont les deux projections d'un des points de la courbe cherchée. Cette méthode suppose, comme on vient de le voir, qu'on sache mener une tangente telle que $n'p$, à la courbe méridienne, par un point pris hors cette courbe. La tangente $n'p$ est la trace d'un plan tangent à la surface cylindrique qui a pour base la courbe méridienne, et dont les arêtes sont perpendiculaires au plan méridien AN de cette courbe.

159. Ces trois méthodes s'appliquent également à la détermination de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur l'ellipsoïde de révolution, dans l'hypothèse des rayons lumineux parallèles.

Soit (ρ, ρ') l'un de ces rayons; on conçoit un cylindre tangent à l'ellipsoïde, engendré par une droite parallèle à (ρ, ρ') ou (BEC, *bec*) : la courbe de contact de ces deux surfaces est la ligne demandée.

Ayant coupé la surface de révolution par un plan quelconque perpendiculaire à son axe, elle est touchée suivant le cercle contenu dans ce plan, par un cône droit qui a son sommet sur l'axe. Le plan tangent à ce cône droit, mené parallèlement au rayon de lumière (ρ, ρ') , touche la surface de révolution en un point qui appartient à la courbe de contact de cette surface, et de la surface cylindrique dont la génératrice est parallèle aux rayons lumineux.

La surface de révolution est aussi touchée suivant le cercle contenu dans le plan perpendiculaire à son axe, par une sphère dont le centre est sur cet axe. Lorsque le grand cercle de cette sphère dont le plan est perpendiculaire au rayon de lumière, et le petit cercle commun à la sphère et à la surface de révolution se coupent, les deux points d'intersection appartiennent à la courbe de contact de la surface de révolution et du cylindre dont les arêtes sont parallèles au rayon de lumière. On obtient encore des points de cette courbe, en menant parallèlement au rayon de lumière des plans tangens au cylindre qui a successivement pour base la courbe méridienne considérée dans ses différentes positions, et pour arêtes des droites perpendiculaires au plan de cette courbe méridienne.

On obtiendra par l'une de ces trois méthodes la ligne de séparation d'ombre et de lumière ($ab\gamma\delta$, $a'b'\gamma'\delta'$).

On remarquera sur cette courbe de contact, les points dont les projections verticales sont ϕ , ψ , ω , μ , γ , δ . Les deux premiers ϕ et ψ sont les points de contact de la courbe méridienne $a'dd'a$, et des parallèles à la projection verticale du rayon lumineux; ω et μ appartiennent aux cercles limites de la courbe de contact du cylindre tangent, et se déterminent comme les points k, k' (art. 155) de la courbe de contact du cône tangent. Enfin les points γ , δ .

correspondent aux points γ, δ placés sur un diamètre $\gamma\delta$ du cercle $OO'\gamma\delta'$, perpendiculaire à la projection horizontale p du rayon lumineux.

Les projections verticales des courbes de contact du cône et du cylindre, sont dessinées en parties pleines et en parties ponctuées. La partie pleine correspond à la portion de la surface de révolution qui est en avant du méridien OO' , parallèle au plan vertical de projection. La partie pleine dans la projection horizontale, correspond à la portion de la surface de révolution qui est au-dessus du plus grand cercle de cette surface ($OO'MM', oo'$).

160. Des trois méthodes que nous avons exposées, une seule suffit pour trouver les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur les surfaces de révolution, dont on connaît les génératrices; cependant pour obtenir ces courbes avec exactitude, et pour éviter l'emploi des lignes droites qui se couperaient trop obliquement, on sentira dans la pratique du dessin, la nécessité d'avoir recours à l'une ou à l'autre des trois méthodes, et de choisir, dans chaque cas particulier, celle qui donnera les constructions les plus exactes.

Corollaire.

161. Si l'on regarde la parallèle (BC, bc) au rayon de lumière, comme une droite donnée, on aura résolu la question de mener par cette droite un plan tangent à une surface de révolution. En effet, ce plan est (art. 32) tangent au cône et au cylindre circonscrits à l'ellipsoïde, et le point de contact a pour lieux géométriques, les courbes de contact de l'ellipsoïde et des surfaces qui lui sont circonscrites : or, ces courbes qui ont pour projections, l'une, les lignes $HH'MMP$, $hh'mm'p$; l'autre les lignes $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, se coupent aux points (α, α') , (β, β') ; donc les plans menés par ces points et par la droite donnée (BC, bc), sont tangens à l'ellipsoïde.

DE L'OMBRE D'UNE VIS TRIANGULAIRE. (Pl. 7. O.)

De la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface réglée du filet de la vis.

162. Nous ne considérerons, sur la vis triangulaire, que le filet qui est en saillie sur le noyau de cette vis. Le noyau est un cylindre droit, qui a pour base un cercle du rayon AB ou AD (pl. 7. O). La section du premier tour de filet par un plan vertical CAE , qui passe par l'axe vertical A du noyau, est un triangle isocèle Cbc , dont les côtés Cb, cb prolongés coupent l'axe du noyau

aux points (A, a) , (A, a') . Le chevron $C'bc$ est la figure génératrice du filet de la vis; les droites $C'b, bc$ se meuvent de manière que chaque point de ces droites décrit une hélice (art. 36) dont le pas est égal au troisième côté Cc du triangle $C'bc$; chaque hélice est sur un cylindre droit de même axe que le noyau, dont la base est un cercle qui a pour rayon la distance constante du point mobile à cet axe. Ainsi le point (C, C') décrit sur le cylindre droit à base circulaire $C'FEF'$, une hélice dont la projection sur le plan vertical XY , est $C'fegf'e'd'$... L'hélice décrite par le point (B, b) sur le noyau $BDGG'$, séparé le dessus et le dessous du filet; elle a pour projection verticale, la ligne $bgdb'g'd'$ Ces deux hélices et l'axe du noyau peuvent être considérés comme les trois directrices de la droite mobile qui engendre le filet de la vis (art. 52, liv. I^{er}).

Soit $(CBA, C'ba)$ la première position de la génératrice; cette droite coupe l'axe du noyau au point (A, a) , et les deux hélices directrices aux points (C, C') , (B, b) . L'axe est pour chacun de ses points sa propre tangente. Les hélices ont pour tangentes aux points (C, C') , (B, b) de la droite $(CB, C'b)$ de la surface du filet, des droites situées dans les plans verticaux CH, BI perpendiculaires au rayon ABC , et par conséquent parallèles à l'axe du noyau (A, aa') ; d'où il suit (art. 151, liv. I^{er}) que la surface du filet est touchée suivant la droite $(ABC, C'ba)$, par un parabolôide, qui a pour directrices l'axe du noyau et deux tangentes aux hélices décrites par les points (C, C') , (B, b) . La tangente au point (C, C') est (art. 37) l'hypothénuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés une droite horizontale CH égale au quart de la circonférence $C'FEF'$, et une droite verticale égale au quart $C'h$ du pas de l'hélice. La tangente au point (B, b) de la seconde hélice, est l'hypothénuse d'un autre triangle rectangle qui a aussi pour côté vertical un quart de pas de l'hélice, et pour côté horizontal une droite BI égale au quart de la circonférence $BGDG'$. Un plan vertical AHH , passant par l'axe (A, aa') du noyau, et par les points I, H , coupe le parabolôide tangent, suivant une droite dont la projection verticale hh' est parallèle au côté $C'b$ du triangle $C'bc$.

Ainsi la droite mobile génératrice du parabolôide tangent, est pour le premier mode de génération, constamment parallèle au plan vertical CH , lequel est perpendiculaire au plan vertical ABC , et pour le second mode, elle se meut parallèlement au plan $(CC', C'b)$, perpendiculaire au plan vertical ABC , et incliné à l'horizon sous un angle $BC'b$. Ce second plan est parallèle aux deux droites (ABC, abc') , (AHH, hh') du parabolôide.

Si l'on conçoit ce parabolôide fixé à la droite mobile génératrice de la surface du filet, il sera tangent à cette surface dans toutes les positions de sa génératrice.

Du cône ou du cylindre tangent à la surface du filet d'une vis.

163. Le point lumineux étant le sommet du cône tangent à la surface du filet d'une vis, le plan mené par ce point et par une droite quelconque de la surface, est tangent à cette surface (art 144, liv. 1^{re}) : le point de contact appartient à la ligne de séparation d'ombre et de lumière, ou au contour apparent (art. 109), si l'on a pris l'œil du spectateur pour le sommet du cône. Pour déterminer le point de contact, on conçoit par la droite de la surface du filet, le paraboloidé tangent dont on connaît les deux systèmes de génération. Le plan mené par le sommet du cône, coupe deux droites quelconques du second système de génération en deux points, et la droite qui joint ces deux points, rencontre la droite commune au paraboloidé et à la surface du filet, au point de contact demandé. Le plan mené parallèlement aux rayons de lumière, toucherait le paraboloidé en un point qui serait sur la ligne de séparation d'ombre et de lumière, dans l'hypothèse d'un point lumineux situé à l'infini. Cette ligne peut aussi être considérée comme la courbe de contact de la surface du filet et d'un cylindre dont la droite génératrice est parallèle aux rayons lumineux. Ainsi, par la substitution d'une zone de paraboloidé à celle de la surface du filet, on détermine sur chaque droite de la surface, un point de la ligne de contact de cette surface et d'un cône dont on donne le sommet, ou d'un cylindre dont la génératrice est parallèle à une droite donnée.

De la courbe de contact de la surface du filet d'une vis et d'un cylindre tangent à cette surface; des points limites de cette courbe.

164. Le filet d'une vis étant compris entre les deux cylindres verticaux qui ont pour bases les cercles des rayons AB, AC, les lignes de séparation d'ombre et de lumière dans l'hypothèse des rayons de lumière parallèles, ne doivent pas s'étendre au-delà de ces cylindres; c'est pourquoi nous allons rechercher les points de ces lignes qui se trouvent sur les hélices décrites par les extrémités (C, C'), (B, b), de la droite génératrice du filet.

Nous ferons remarquer que les plans tangens de la surface du filet, menés par tous les points d'une hélice de cette surface, font le même angle avec l'axe du noyau de la vis ou avec toute autre droite parallèle à cet axe. En effet, chacun de ces plans contient une tangente à l'hélice, et la droite de la surface qui passe par le point de contact; or, ces deux droites font entre elles et avec une parallèle à l'axe du noyau, des angles qui ne varient pas;

donc le plan mené par ces deux droites, à une inclinaison constante par rapport à l'axe, quel que soit le point de l'hélice, intersection de ces droites.

Déterminons ce plan, pour un point (F, f) de l'hélice $(\text{CEFF}^*, C/c)$, tel que la tangente à l'hélice en ce point, a pour projection horizontale une droite FK perpendiculaire au rayon AF . La hauteur fA' du point (F, f) de l'hélice au-dessus du plan horizontal de projection, étant égale à un quart de pas de l'hélice, on prend FK égale au quart de circonférence CF , et la tangente à l'hélice au point (F, f) coupe le plan horizontal au point K . La droite de la surface du filet qui passe par le même point (F, f) de l'hélice rencontre le plan horizontal au point ϕ , qu'on détermine en menant $f\phi$ parallèle au côté cb du triangle $C'bc$, et en portant $A'\phi$ de F en ϕ' . La droite $K\phi'$ qui joint les deux points K, ϕ' , est la trace horizontale du plan tangent à la surface du filet au point (F, f) de l'hélice décrite par le point (C, C') .

Si par un point quelconque (O, o) de l'espace on mène un plan parallèle à ce plan tangent, il aura pour trace horizontale une droite LK' parallèle à $K\phi'$; et pour déterminer le point L où cette trace coupe la droite OO' , parallèle à AF , on conçoit par le point (O, o) une parallèle à la génératrice $(F\phi', fA')$, qui coupe la droite OL au point L . Ayant mené ol parallèle à cb ou $f\phi$, cette parallèle rencontre l'intersection XY des deux plans de projection au point l ; la circonférence décrite du point O comme centre avec $Ol' = O'l$ pour rayon, rencontre la droite OO' prolongée, au point L intersection du plan horizontal et de la parallèle à la génératrice $(F\phi', fA')$ du filet de la vis, menée par le point (O, o) . La perpendiculaire OM , abaissée du point O sur LK' , détermine le rayon de la base d'un cône droit, dont tous les plans tangents ont, par rapport à l'axe de ce cône, une inclinaison égale à celle du plan tangent à la surface du filet, mené par le point (F, f) de l'hélice que l'on considère, ou par tout autre point de cette hélice. Les deux cônes droits qui ont pour sommet commun le point (O, o) , et pour bases des cercles décrits du point O comme centre avec des rayons OM, Ol' , sont tels qu'un plan tangent au premier cône et sécant du second, contient deux droites de ces cônes qui font constamment entre elles le même angle : la projection horizontale LOM de cet angle est aussi constante. Nous désignerons les deux cônes droits du sommet commun (O, o) par les lettres C et C' . D'après la construction du point L de la base du second cône C' , chaque côté de ce cône fait avec son axe, un angle égal à celui que la droite génératrice de la surface du filet fait avec l'axe du noyau (A, aa') .

165. Supposons maintenant qu'il faille mener un plan tangent à la surface du filet, parallèle au rayon de lumière (λ, λ') , et déterminer le point de contact, sur l'hélice donnée qui contient ce point. On mènera un plan tangent au

cône C par la droite (OZ, oZ), parallèle à ce rayon. L'arête de contact sur ce cône ayant pour projection horizontale la droite ON, on fera l'angle NOP égal à l'angle à MOI, et la droite OP sera la projection horizontale de la parallèle à la projection de la génératrice de la surface du filet qui contient le point de contact demandé. Menant la droite AS parallèle à OP, cette parallèle coupe la base circulaire du rayon AC au point S, projection horizontale d'un point (S, s) de la courbe de contact de la surface du filet et d'un cylindre tangent à cette surface, dont les arêtes sont parallèles au rayon de lumière. On déterminera de la même manière, par la considération de deux autres cônes droits C, G', le point (T, t) de la courbe de contact sur l'hélice du noyau, décrite par le point (B, b). Ayant trouvé les points limites de la courbe de contact de la surface du filet et du cylindre tangent, on construira les points intermédiaires, ou sur les droites de la surface du filet comprises dans l'angle des deux plans verticaux AS, AT, en imaginant par chacune de ces droites, le paraboloides tangent (art. 163), ou sur des hélices qui auraient pour projections horizontales des cercles décrits du point A comme centre, avec des rayons plus petits que AS et plus grands que AT.

La verticale élevée par le point S ou T, rencontre les hélices auxquelles ces points appartiennent en d'autres points dont les projections verticales sont s, s', s'', etc., ou t, t', t'', et pour chacun de ces points, le plan tangent à la surface du filet est parallèle au rayon de lumière.

Des limites de la projection verticale d'une vis triangulaire,

166. Le triangle générateur (CB, C'bc) du filet de la vis, se meut de manière que chaque point des côtés C'b, bc de ce triangle engendre une hélice; les projections verticales des hélices du filet sont touchées par une courbe qui est la limite de la projection verticale de la vis. Pour construire cette courbe, on la considère comme la section droite d'un cylindre horizontal tangent aux surfaces supérieure et inférieure du filet, ou comme la projection de la ligne, lieu géométrique des points de contact de la surface du filet, et de plans perpendiculaires au plan vertical de projections. Une hélice étant donnée sur la surface du filet, on détermine le point de cette ligne pour lequel le plan tangent au filet, est perpendiculaire au plan vertical de projections : la projection verticale de ce point appartient à la limite de la projection verticale de la vis. Prenons pour exemple l'hélice décrite par le point (C, C'). Le plan tangent à la surface du filet, mené par un point quelconque de cette hélice, fait avec l'axe de la vis un angle constant qui détermine l'angle du cône droit C dont le sommet est en un point quelconque (O, o) de l'espace (art. 164). Le plan

tangent à ce cône droit, perpendiculaire au plan vertical de projection, passe par une horizontale MM' perpendiculaire à XY et tangente au cercle du rayon $OM = OM'$. Portant l'angle MOL en $MO\mu$, la droite $O\mu$ est la projection horizontale d'une parallèle à la projection de la génératrice de la surface du filet, laquelle génératrice est située dans le plan tangent à cette surface, perpendiculaire au plan vertical de projection. Menant le rayon $A\pi$, parallèle à $O\mu$, qui coupe le cercle du rayon AC au point π , la perpendiculaire $\pi\pi'$ à XY , coupe la projection verticale $C'e$ de l'hélice décrite par le point (C, C') , au point (π, π') de la courbe tangente aux projections verticales des hélices du filet. La droite $\pi\pi'$ prolongée coupe les tours successifs de la projection verticale de la première hélice, en des points distans de la hauteur du pas de cette hélice. Pour mieux voir la projection verticale du filet de la vis entre les points C' et b de cette projection, on a tracé à part (*fig. a*), sur une plus grande échelle, la droite $C'b$, et la projection verticale de l'hélice eCf sur laquelle on a rapporté les deux points π', π'' , origines des deux branches $\pi'3, \pi'4$ de la limite de la projection verticale de la vis. En raisonnant sur l'hélice du noyau décrite par le point (B, b') , de la même manière que pour la première hélice, on y trouve des points 5, 6, analogues aux points π', π' . Les points 5, 6 (*fig. a*), sont les naissances des deux branches 5.7.8, 6.7.9, qui se coupent au point 7 en avant du point b , sur l'horizontale $b7.7'$. La branche 6.7.9 est le prolongement de la branche $\pi'4.9.6$, qui se répète en $\pi'3$ au-dessous de l'horizontale XY , et en 5.7.8 au-dessus de l'horizontale $7.7'$.

De la courbe de contact de la surface du filet de la vis triangulaire, et d'un cône tangent à cette surface.

167. Le sommet du cône tangent étant donné, il n'y a aucune droite de la surface du filet qui ne contienne un point de la courbe de contact. Cette courbe a pour limites les points situés sur les hélices extrêmes décrites par les points (C, C') , (B, b') de la droite génératrice du filet. Nous allons d'abord construire le point situé sur la première hélice. Soit (O, o) le sommet du cône tangent, et en même temps le sommet du cône droit que nous avons désigné (art. 164) par la lettre C , dont tous les plans tangens font avec la verticale $(O, O'o)$ un angle égal à celui que les plans tangens à la surface du filet, menés par les points de la première hélice, font avec l'axe $(A, a'A)$ du noyau. Regardons le point donné (O, o) comme le sommet d'un troisième cône, qui a pour base la première hélice, décrite par le point (C, C') ; le plan tangent à ce dernier cône et au cône C , sera aussi tangent à la surface développable, circonscrite à la surface du filet suivant l'hélice; donc il sera tan-

gent à cette dernière surface, et le point de contact sur l'hélice appartient à la courbe de contact de la surface du filet et du cône tangent à cette surface dont le sommet est le point donné (O, o) .

Le cône dont le sommet est au point (O, o) , et qui a pour base l'hélice décrite par le point (C, C') , est coupé par le plan horizontal suivant la courbe spirale $C1a'2$, comprise dans l'angle $\alpha O\alpha'$, lequel angle est formé par les tangentes au cercle du rayon AC , menées par le point O ; le cône droit C a pour base sur le plan horizontal, le cercle du rayon OM ; donc si l'on mène les tangentes $1.1'$, $2.2'$, etc., aux deux bases, on aura les traces horizontales des plans tangens au cône C et au cône qui a pour base l'hélice décrite par le point (C, C') .

La première tangente $1.1'$ touche le cercle du rayon OM au point $1'$, et le plan tangent à la surface du filet, qui a pour trace horizontale cette tangente, touche le cône droit C suivant une droite dont la projection horizontale est $O1'$. Ce plan coupe le cône droit qui a pour base le cercle du rayon OL , suivant une droite dont la projection horizontale est $O2$, qu'on détermine en faisant l'angle $1'O2$ égal à l'angle MOL . Menant par le centre A du cercle $CDEF$ le rayon AQ parallèle à $O2$, l'extrémité Q de ce rayon est la projection horizontale du point cherché (Q, q) sur l'hélice décrite par le point (C, C') .

168. La droite OQ prolongée coupe la courbe spirale au point de contact 1 de cette courbe et de la droite horizontale $1.1'$, trace du plan qui est tangent à la surface du filet, au point (Q, q) de cette surface. L'intersection de ce plan tangent et de l'axe (A, aa') , est le point $(A, \downarrow)$ qu'on détermine en menant le plan vertical $O2$, parallèle au plan vertical de projection. La section du plan tangent par le plan vertical $O2$, est une droite dont la projection verticale est $o2$. Par le point (γ, γ') de cette droite, situé dans le plan vertical $A\gamma$ parallèle à la droite $1.1'$, on mène l'horizontale $(A\gamma, \gamma'\downarrow)$ du plan tangent; la parallèle $\gamma'\downarrow$ à XY , coupe la droite aa' au point $\downarrow$. La droite génératrice du filet dans sa première position $(CB, C'b)$, coupe l'axe (A, aa') au point (A, a') ; quand elle coupe l'axe au point $(A, \downarrow)$, chacun de ses points s'est élevé de la hauteur $a\downarrow$ dont on connaît le rapport avec la hauteur du pas de l'hélice décrite par le point (C, C') . Prenant un arc CFQ du rayon AC , qui soit à la circonférence entière dans le même rapport, l'extrémité Q de cet arc sera la projection horizontale du point cherché (Q, q) de l'hélice décrite par le point (C, C') , et qu'on a déjà trouvé par une autre considération.

On construira de la même manière le point (R, r) , sur l'hélice décrite par le point (B, b) , et quant aux points intermédiaires compris entre les deux plans verticaux AS, AR , on les trouverait ou par la même méthode, ou par la considération du paraboloïde tangent (art. 162).

168. Le second plan tangent à la surface du filet dont la trace horizontale est 2.2', touche cette surface au point (Q', q') , situé sur le tour du filet qui suit immédiatement celui sur lequel on a trouvé le point (Q, q) . Le cône tangent, dont le sommet est au point donné (O, o) , touche les tours successifs du filet suivant les courbes (QR, qr) , $(QR', q'r')$, ... et ainsi de suite à l'infini. Dans le cas où le cône tangent devient un cylindre, tous les points tels que q, q' , etc., où r, r' etc., sont situés sur une parallèle à la projection verticale $aA'a'$ de l'axe du noyan.

Les courbes de contact de la surface de la vis et du cône tangent à cette surface, qu'on n'a tracées que sur le dessus des filets, se construiraient de la même manière pour le dessous.

Quant aux ombres portées sur les filets de la vis, on peut consulter la légende de l'épure, que nous avons publiée en 1813 (tome II de la *Correspondance*, n° V, page 447). Cette épure comprend le dessin complet de la vis avec sa tête et son écrou, qui était le sujet de l'une de mes leçons à l'École polytechnique.

§ VI. DES POINTS BRILLANS DES SURFACES.

De la largeur de la pénombre, dans l'hypothèse où le corps lumineux et le corps opaque sont des sphères. (Pl. 8 O, réunie à la planche 10 P.)

169. On a vu (art. 102) que les surfaces du corps lumineux et du corps opaque étant données, la surface développable circonscrite à ces deux surfaces est déterminée; qu'elle est l'enveloppe de l'espace qu'un plan mobile parcourrait en touchant continuellement les surfaces des deux corps; enfin, que les portions de l'espace, comprises entre les nappes de cette surface enveloppe, sont dans l'ombre ou dans la pénombre. Prenons pour exemple la terre éclairée par le soleil, et supposons que chacun de ces corps, l'un opaque, l'autre lumineux, soient des sphères; en joignant leurs centres par une droite, un plan quelconque mené par cette droite contient les centres S, T (pl. 8 O, fig. 1) du soleil et de la terre, et les grands cercles $ABDE$, *abde* de ces deux globes. La surface développable, circonscrite aux deux sphères des centres S et T , se compose de deux cônes droits qui ont pour axe commun la droite ST des centres, et pour sommets, l'un le point I de l'axe situé entre les centres, l'autre un point situé au-delà des centres. Le premier cône est tangent aux sphères suivant les cercles des diamètres AB et *ab*, et le second cône suivant les cercles des diamètres DE , *de*; l'ombre totale de la sphère du centre T , est comprise entre ce dernier cercle et le second cône droit, prolongé indéfini-

ment au-delà du centre T. La pénombre est la partie de l'espace comprise entre la zone sphérique qui est terminée par les cercles des diamètres ab , de , et les deux cônes droits prolongés indéfiniment au-delà de ces cercles. En coupant les deux cônes par un plan XY perpendiculaire à la droite ST des centres, la section de l'ombre totale est un cercle du diamètre PQ, et celle de la pénombre est un disque compris entre les cercles des rayons Kp, Kp. Les plans tangents à la sphère T, menés par les deux points m , m' de la pénombre Qq, étant prolongés indéfiniment en M et M', ils séparent la sphère lumineuse S en deux parties inégales, dont une seulement éclaire le point m ou le point m' ; ce dernier point, plus éloigné de l'ombre totale que le premier, est aussi plus éclairé.

Lorsque la distance ST des centres des deux sphères est très-grande, les droites Ee, Aia des cônes circonscrits à ces sphères, se coupent en un point c , très-rapproché de la sphère du centre T. Les points S, T étant considérés comme les centres du soleil et de la terre, cette distance est de 23578 rayons terrestres; alors le point c ne s'écarte pas sensiblement de la surface de la terre, et l'angle d'un demi-degré, sous lequel on voit le soleil d'un point quelconque de la terre, diffère peu de celui que les deux côtés cA, cE ou leurs prolongemens cq , cQ font entre eux. Il en résulte que le rapport $\frac{Qq}{cQ}$ de la largeur Qq de la pénombre sur le plan XY, à la droite cQ, distance du point c à l'ombre Q de ce point, a pour valeur très-approchée, le rapport inverse du rayon, à la tangente d'un angle de demi-degré, c'est-à-dire $\frac{1}{\tan 45^\circ}$. Si le plan d'ombre Qq' était incliné par rapport au plan XY, la nouvelle pénombre Qq' serait à très-peu près égale à la première Qq multipliée par le sinus de l'angle Qq'q du plan Qq' et du rayon de lumière cqq' . En supposant cet angle de 45 degrés, on aurait $Qq' = Qq \sqrt{2}$, et par conséquent le rapport de la pénombre Qq' à la droite cQ, distance du point c à son ombre Q, serait $\frac{1}{\tan 45^\circ}$ produit de $\frac{1}{\tan 45^\circ}$ par $\sqrt{2}$.

La zone sphérique, comprise entre les cercles des diamètres ab , de , appartient à la pénombre, et parce que les rayons Tb, Td perpendiculaires aux côtés des cônes Bbp, Adp font entre eux un angle égal à celui de ces côtés, c'est-à-dire d'un demi-degré, il s'ensuit que la largeur bd, ou ae, de la pénombre sur la sphère terrestre, est à très-peu près la 115^e partie du rayon de cette sphère.

Du rapport des clartés réelles et apparentes, dans l'hypothèse d'un corps lumineux à dimensions finies. — Des points brillans des surfaces polies.

170. Nous avons déterminé les ombres linéaires, en supposant que chaque point de l'espace n'est éclairé que par un seul rayon, parallèle à une droite donnée, ou partant d'un point lumineux. Dans cette hypothèse, et si les rayons de lumière sont parallèles entre eux, tous les points isolés de l'espace sont également éclairés, et la clarté d'un élément de surface courbe est proportionnelle au sinus de l'angle que le plan de cet élément fait avec le rayon de lumière. Lorsque les rayons partent d'un point, la clarté d'un point isolé de l'espace est en raison inverse du carré de sa distance au point lumineux; celle d'un élément de surface est en raison inverse du carré de la distance de cet élément au point lumineux, et en raison directe du sinus de l'angle, formé par le plan de l'élément et par le rayon de lumière incident; le rapport de la clarté réelle d'un point isolé de l'espace, à sa clarté apparente, ne dépend que de la distance de ce point à l'œil du spectateur, et ce rapport, pour un élément de surface, dépend d'abord de cette distance, et ensuite de l'angle que le rayon visuel, dirigé vers l'œil, fait avec le plan de l'élément. La détermination des clartés réelles et apparentes devient beaucoup plus compliquée dans l'hypothèse où la lumière émane d'un corps à dimensions finies, tel que le soleil : alors, la clarté d'un point isolé de l'espace est déterminée par le cône lumineux qui a son sommet en ce point, et qui est circonscrit à la surface du corps lumineux. Un point dont le cône lumineux n'est atteint par aucun corps opaque, est totalement éclairé (art. 97); les points totalement éclairés ne le sont également, que lorsque les cônes lumineux qui les éclairent sont égaux.

Après avoir construit les lignes qui forment sur la surface d'un corps donné, la séparation d'ombre et de lumière et le contour apparent qui correspond à une position déterminée de l'œil d'un spectateur, la partie de la surface comprise entre ces lignes, est visible en totalité, et cependant elle ne le serait qu'en partie, si le corps était parfaitement poli. En effet, considérons un point éclairé de ce corps, placé dans l'intérieur du contour apparent. Ce point, dans l'hypothèse d'un corps lumineux à dimensions finies, est le sommet du cône de lumière dont la surface est circonscrite à celle du corps lumineux; or, on conçoit qu'aucun des rayons de lumière appartenant au cône de lumière, ne puisse être réfléchi vers l'œil du spectateur : donc il peut arriver que le point de l'intérieur du contour apparent sur le corps opaque donné, ne soit pas visible si ce corps était parfaitement poli. Mais tous les

points éclairés de l'intérieur du contour apparent d'un corps opaque, sont effectivement visibles. Il résulte de cette observation qu'il n'y a aucun corps qui soit d'un poli parfait. La surface de tous les corps est ondulée; chaque molécule de cette surface s'étend dans divers sens, et présente au corps lumineux une facette, qui réfléchit la lumière vers l'œil du spectateur.

La partie d'un corps qui serait la seule visible dans l'hypothèse d'un poli parfait, en serait encore la partie brillante dans l'hypothèse contraire, et l'on pourrait proposer d'en déterminer le contour, qui dépendrait de la forme du corps opaque et du corps lumineux, et de leurs positions par rapport au spectateur. Nous allons résoudre ce problème pour le cas particulier où le corps lumineux se réduit à un point. Alors les seuls points visibles d'un corps dans l'hypothèse d'un poli parfait, sont encore les points *brillants* de ce corps, en admettant l'imperfection du poli des surfaces.

Du point brillant sur une surface courbe quelconque.

171. Quelle que soit la surface du corps donné, on conçoit un ellipsoïde de révolution tangent à cette surface et qui a pour foyers le point lumineux et l'œil du spectateur. Le point de contact de la surface proposée et de l'ellipsoïde, détermine le point *brillant*. La normale en ce point divise en deux parties égales le rayon de lumière incident et le rayon réfléchi vers l'œil du spectateur; de plus, elle passe par l'axe de révolution de l'ellipsoïde, qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur. Lorsque les rayons de lumière sont parallèles entre eux, l'ellipsoïde tangent se change en un paraboloïde de révolution, qui a pour axe la parallèle au rayon de lumière menée par l'œil du spectateur. La normale au point de contact de la surface du corps et du paraboloïde, divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon incident en ce point et par le rayon réfléchi vers l'œil; elle passe aussi par l'axe du paraboloïde.

Construction du point brillant. (Pl. 8. O, fig. 2.)

1° Dans l'hypothèse d'un point lumineux.

172. On joint l'œil du spectateur et le point lumineux par une droite, et par tous les points de cette droite, on mène des normales à la surface proposée. Les pieds de ces normales sur la surface, forment une courbe qui est évidemment le lieu géométrique du point brillant. Mais il y a sur chaque normale un point que l'on peut regarder comme le sommet d'un angle dont les côtés passent par le point lumineux et par l'œil du spectateur, et qui est divisé en deux parties égales par la normale; ce point qui appartient à une

courbe de la surface réglée des normales, serait le point brillant demandé, s'il était le pied de la normale; d'où il suit que cette courbe est un lieu géométrique du point brillant. Mais la courbe des pieds des normales sur la surface proposée est un autre lieu géométrique du même point; donc l'intersection de ces deux courbes détermine le point brillant.

2^e. Dans l'hypothèse des rayons lumineux parallèles.

On mène par l'œil une parallèle aux rayons lumineux; de tous les points de cette droite, on abaisse des normales sur la surface proposée. La courbe des pieds des normales, et celle des sommets des angles égaux formés de part et d'autre de chaque normale par un rayon incident et un rayon réfléchi, déterminent le point brillant.

Explication de la fig. 2, pl. 8. O.

173. Soient L le point lumineux, α l'œil du spectateur, NO une normale à la surface, menée par un point quelconque N de la droite $L\alpha$ qui joint l'œil et le point lumineux. On abaisse la perpendiculaire $\alpha Q\alpha'$ sur NO , et on porte la distance $Q\alpha$ en $Q\alpha'$. La droite $L\alpha'$ prolongée coupe la normale au point P , qui serait le point brillant de la surface, si ce point coïncidait avec le pied de la normale sur la surface.

Lorsque les rayons de lumière sont parallèles à la droite donnée ρ , on mène par l'œil α la parallèle $\alpha N'$ au rayon donné ρ , et par un point N' de cette parallèle, la normale à la surface. Ayant abaissé la perpendiculaire $\alpha\alpha'$ sur cette normale, on porte la distance αQ en $Q\alpha'$; la parallèle $\alpha'P$ à la droite ρ coupe la normale au point P , qui serait le point brillant de la surface, si ce point coïncidait avec le pied de la normale sur la surface.

Ces deux constructions font voir comment, dans l'hypothèse d'un point lumineux ou des rayons parallèles, on détermine sur chacune des normales d'une surface, qui est dans le plan de l'œil et d'un rayon lumineux, un point tel que P ou P' d'une courbe, qui est un lieu géométrique du point brillant de la surface.

Construction du point brillant sur quelques surfaces particulières.

174. La méthode générale que nous venons d'exposer se simplifie pour quelques cas particuliers que nous allons examiner.

Supposons 1^o que la surface donnée soit telle qu'elle ait pour surface normale le long d'une ligne connue, un plan; chacun de ces plans normaux coupera la ligne droite qui joint l'œil du spectateur et le point lumineux, ou la parallèle aux rayons de lumière menée par l'œil; si du point d'intersection, on

abaisse une normale sur la ligne contenue dans le plan normal, elle sera aussi normale à la surface : le pied de cette normale, et le sommet de l'angle qu'on trouve sur cette normale comme pour le cas général, appartiennent à deux courbes, dont l'intersection détermine le point brillant.

Les surfaces développables et les surfaces de révolution sont dans ce cas particulier, car elles ont pour surfaces normales des plans qui coupent les premières suivant des droites, et les dernières suivant des courbes méridiennes.

2^o La surface proposée peut avoir pour surfaces normales suivant des lignes connues, ou des cylindres ou des cônes qui ont ces lignes pour bases. Dans le premier cas, on mène un plan par la droite qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur, et par une parallèle à la génératrice de l'un des cylindres normaux; si ce plan coupe le cylindre, il contiendra une normale sur laquelle on aura, comme précédemment, les points de deux courbes dont l'intersection détermine le point brillant. Dans le second cas, on mène le plan par la droite qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur, et par le sommet de l'un des cônes normaux; l'intersection du plan et du cône normal, détermine une normale à la surface proposée, qui rencontre, comme la précédente, la droite menée par l'œil et par le point lumineux, ou la parallèle aux rayons lumineux qui passe par l'œil, lorsque le point lumineux est à l'infini.

On a vu (art. 192, liv. I^{er}) que les surfaces de révolution ont pour surfaces normales suivant des cercles, des cônes droits qui ont pour bases ces cercles, et pour sommets, des points de l'axe de révolution; on pourra donc employer les cônes normaux pour la recherche des points brillants. La détermination de ces points sera encore plus facile que par la méthode précédente, qui suppose qu'on sache abaisser d'un point hors d'une courbe méridienne, une normale sur cette courbe.

3^o La surface proposée est réglée, c'est-à-dire, qu'elle a pour génératrice une ligne droite. Toute surface réglée a pour surface tangente, suivant une droite, une infinité de plans gauches ou paraboloides hyperboliques (art. 150, pag. 88). Or, l'un de ces paraboloides tangens a pour directrices, trois droites perpendiculaires à la droite de la surface réglée; donc si l'on fait tourner ce paraboloïde autour de la droite de contact, il deviendra, après un quart de révolution, normal à la surface réglée. Il n'y a donc aucune droite de cette surface par laquelle on ne puisse concevoir un plan gauche qui lui soit normal. La droite qui joint le point lumineux et l'œil du spectateur, ou la parallèle aux rayons de lumière menée par l'œil, rencontre ce paraboloïde normal en un point. Le plan conduit par ce point et par la

droite de la surface réglée, contient, comme dans la solution générale, une normale sur laquelle se trouvent les points des deux courbes, dont l'intersection détermine le point brillant.

Des points brillants à vue d'oiseau, c'est-à-dire dans l'hypothèse où le spectateur est à une distance des objets visibles, telle que tous les rayons visuels peuvent être considérés comme parallèles à une droite donnée.

175. Le point brillant d'une surface est, dans cette hypothèse, l'intersection de deux droites, qui sont parallèles; l'une aux rayons lumineux, et l'autre aux rayons visuels, ou l'intersection, d'une parallèle aux rayons visuels et d'une droite qui passe par le point lumineux. Dans les deux cas, la direction de la normale passant par le point brillant sera déterminée, puisqu'elle divise en deux angles égaux, l'angle des rayons incidents et réfléchis de ce point; la recherche du point brillant dépend donc de la solution de ce problème.

Étant donnée une surface courbe, lui mener une normale parallèle à une droite donnée? Ou de celui-ci :

Étant donnée une surface courbe, lui mener un plan tangent perpendiculaire à une droite donnée?

Ce dernier problème se résout (art. 110) en enveloppant la surface proposée de deux surfaces cylindriques, dont les génératrices sont parallèles à deux droites menées dans le plan perpendiculaire à la droite donnée; les deux courbes de contact se rencontrent au point brillant.

Si la surface proposée est de révolution, on mènera d'abord un plan méridien parallèle à la droite donnée, qui contiendra une courbe méridienne; la normale à cette courbe, parallèle à la droite donnée, coupe la surface de révolution au point brillant de cette surface.

Dans le cas où la surface de révolution est une sphère, on mène par le centre de cette sphère une parallèle aux rayons visuels, et par ce même centre un rayon lumineux; le diamètre de la sphère qui divise en deux parties égales l'angle de la parallèle aux rayons visuels et du rayon lumineux, coupe la sphère au point brillant (fig. 3 et 4, pl. 8, O).

176. On a déterminé (art. 132, pl. 7, O) la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur une sphère, dans l'hypothèse où les rayons de lumière seraient parallèles à une droite donnée (L, l, fig. 3 et 4, pl. 8, O). Cette ligne est un grand cercle de la sphère, qui a pour projections les ellipses (EFGH, *ikrs*). Pour trouver le point brillant par rapport à un spectateur placé à une distance infinie du plan horizontal de projection (fig. 3), on conçoit le plan

vertical AM parallèle à la droite L , et dans ce plan le rayon de lumière AN et la verticale AG passant par le centre de la sphère; la droite Ap qui divise en deux parties égales l'angle GAN , coupe le grand cercle $BCGH$ au point p , qui est le point brillant demandé; ce point p est en projection horizontale p' .

On trouve de la même manière le point brillant pour un spectateur placé à une distance infinie du plan vertical. Le plan ab' (fig. 4), perpendiculaire à ce plan vertical, et parallèle à la droite L , contient le rayon de lumière am et l'horizontale ak , passant par le centre a de la sphère. La droite aq , qui divise en deux parties égales l'angle kam , coupe le grand cercle $bcik$ au point q ; ce point est un autre point brillant, qui a pour projection verticale le point q' .

177. Nous terminerons ce chapitre des ombres, par les légendes des trois planches cotées 15, 16 et 17, qui offrent d'autres exemples de l'application de la géométrie descriptive au tracé des ombres linéaires; les deux premiers exemples sont pris dans les ordres d'architecture, le troisième dans la gnomonique.

La base attique (pl. 15, O), se compose de huit solides de révolution et d'un parallélépipède rectangle.

Ombres d'une base attique, Pl. 15. O.)

NOMS DES PARTIES DONT SE COMPOSE LA BASE ATTIQUE.	DÉSIGNATION DES OMBRES LINÉAIRES À CONSTRUIRE.
Fût de la colonne.	Séparation d'ombre et de lumière.
Congé au-dessous du fût.	1 ^{re} Séparation d'ombre et de lumière.
Premier filet au-dessous du congé.	2 ^{de} Ombre portée par le fût de la colonne.
Petit tore.	Séparation d'ombre et de lumière.
Deuxième filet au-dessous du petit tore.	1 ^{re} Ombre portée par le premier filet, qui se compose des ombres portées par une droite et par un cercle.
Scotie.	2 ^{de} Séparation d'ombre et de lumière.
Troisième filet au-dessous de la scotie	Ombre portée par le tore.
	1 ^{re} Ombre portée par le cercle inférieur du deuxième filet.
	2 ^{de} Ombre portée par le tore.
	Séparation d'ombre et de lumière.

NOMS DES PARTIES DONT SE COMPOSE LA BASE ATTIQUE.	DÉSIGNATION DES OMBRES LINÉAIRES À CONSTRUIRE.
Gros tore.	1 ^{re} Ombre portée par le troisième filet. (Voy. plus haut <i>petit tore</i> .)
	2 ^{re} Ombre portée par le petit tore.
	3 ^{re} Séparation d'ombre et de lumière.
Plinthe.	Faces verticales, les unes éclairées, les autres dans l'ombre.

La base attique est représentée (pl. 15. O.) en plan et en élévation. L'élévation est en même temps une section de cette base par un plan qui passe par son axe, et qui fait voir les courbes méridiennes génératrices des solides de révolution dont elle se compose.

Ombres d'un chapiteau dorique, plan et élévation (PL. 16. O.).

NOMS DES PARTIES DONT SE COMPOSE LE CHÂPITEAU DORIQUE.	DÉSIGNATION DES OMBRES LINÉAIRES À CONSTRUIRE.
Filet au-dessous de l'architrave.	Faces verticales, les unes éclairées, les autres dans l'ombre.
Talon (à surfaces cylindriques).	1 ^{re} Ombre du filet.
	2 ^{re} Séparation d'ombre et de lumière.
	3 ^{re} Ombre du talon sur lui-même.
Larmier (surfaces planes).	Ombres du talon.
Quart de rond (surface de révolution).	Ombres du larmier.
	Ligne de séparation d'ombre et de lumière.
	1 ^{re} Ombres du quart de rond.
	2 ^{re} Ombres du larmier.
Filet au-dessous du quart de rond.	3 ^{re} Suite de l'ombre du quart de rond. (On voit les projections de ces ombres linéaires sur l'élévation, en allant de gauche à droite.)
	1 ^{re} Ombre du cercle inférieur du filet.
	2 ^{re} Ombres du larmier.
Cavet.	3 ^{re} Suite de l'ombre du cercle inférieur du filet, ou du cercle supérieur du cavet.
	4 ^{re} Ombre du quart de rond.

NOMS DES PARTIES DONT SE COMPOSE LE CHÂPITEAU DONTQUE.	DÉSIGNATION DES OMÈRES LINÉAIRES À CONSTRUIRE.
---	---

	1° Ombre du cercle inférieur du cavet.
	2° Ombre du larmier.
Gorgéon.	3° Suite de l'ombre du cercle inférieur du cavet.
	4° Ombre du quart de rond.
	5° Séparation d'ombre et de lumière.
Tore de l'astragale.	1° Séparation d'ombre et de lumière.
Filet de l'astragale.	2° Ombre portée par le quart de rond.
Congé.	3° Ombre portée par le tore de l'astragale.
	4° Ombre du cercle inférieur du filet de l'astragale.
Fût de la colonne.	1° Ombre du cercle inférieur du filet.
	2° Séparation d'ombre et de lumière.

CADRAN SOLAIRE. (Pl. 17. O.)

Ombres portées sur une surface donnée par une droite parallèle à l'axe de la terre et par un point pris sur cette droite, en supposant la droite et le point éclairés par le soleil.

178. La détermination de ces ombres comprend la gnomonique ou le tracé des cadrans solaires. On trouve un résumé des leçons que j'ai faites à l'École polytechnique sur cette application de la géométrie descriptive, dans le 11^e cahier du journal de cette école (juillet 1802), et tome II de la *Correspondance*, pages 54 - 63.

Un mémoire sur la *Gnomonique*, de M. Lefrançois (page 261 de ce 11^e cahier), contient la description d'un cadran vertical avec les lignes horaires et les courbes de déclinaisons. M. Girard l'avait tracé en 1800 au palais Bourbon, occupé à cette époque par l'École polytechnique. La pl. 17. O fait voir le cadran de l'ancien collège Navarre, où l'École a été transférée en 1804. M. Girard y a ajouté la courbe du temps moyen. L'inscription de ce cadran apprend qu'il a été tracé en 1747 par un savant (de Parcieux), auteur de plusieurs projets dignes d'un bon citoyen. Un cadran semblable, qu'on voit au palais du Luxembourg, façade sud, est de M. Bouvard, membre de l'Académie royale des sciences.

En 1764, Pingré, astronome-géographe de la marine, a fait exécuter sur la

colonne de la halle aux blés de Paris, un cadran cylindrique qui subsiste encore et qu'on peut prendre pour exemple d'ombres portées par des droites sur une surface courbe. L'auteur de ce cadran a supposé que l'axe de la terre passait par un point de l'axe vertical de la colonne, et il a placé les verges qui marquent les heures dans un même plan horizontal. Chaque verge, considérée comme une ligne droite sans épaisseur, est dirigée suivant la droite d'intersection de ce plan horizontal et d'un plan méridien. Parmi les ombres portées simultanément par toutes les verges, il fallait distinguer celle qui indique la position du soleil. On a placé à l'extrémité de chaque verge une plaque de cuivre, sur laquelle est gravé en gros caractères, et à jour, le chiffre de l'heure que la verge horizontale doit indiquer. Le même chiffre, lorsque le soleil luit, est tracé en caractères de lumière, au bas de la ligne horaire du cadran, qui doit être écartée par l'ombre de la verge. Pour ne laisser aucun doute, on a encore répété le chiffre de l'heure au pied de la verge.

En donnant aux verges une même longueur et une saillie convenable par rapport au fût de la colonne, les ombres portées sur ce fût par les extrémités des verges, un jour de l'année, déterminent la courbe de déclinaison correspondante à ce jour.

Le méridien, qui fait avec celui de Paris un angle dont la mesure est, pour un jour déterminé de l'année, égale à la différence du temps vrai et du temps moyen, réduite en degrés, rencontre la courbe de déclinaison correspondante à ce jour, en un point qui appartient à la courbe du temps moyen.

La construction des cadrans est fondée sur la connaissance de plusieurs faits astronomiques, exposés avec beaucoup de clarté dans l'astronomie de M. Franeceur; la Notice suivante est extraite de cet ouvrage.

Notice historique sur les cadrans solaires.

Tout peuple qui a une astronomie régulière doit compter l'art de diviser le temps. Il est donc certain que les Egyptiens avaient trouvé dans le ciel des moyens d'atteindre à ce but. On doit cependant avouer qu'on n'a trouvé aucun cadran solaire dans les antiquités d'Égypte, et que les sculpteurs ne fournissent aucun indice qu'il en ait existé. Mais, d'un côté, ces instrumens sont peut-être enfouis dans les sables, ou renversés au milieu des ruines; et de l'autre on sait que l'esprit de la langue hiéroglyphique est de remplacer les figures positives par des emblèmes. Nul ne prétendra que ceux qui ont élevé les masses immenses qu'on voit employées dans la construction des édifices, ne savaient pas la mécanique, et cependant on ne voit pas d'hiéroglyphe qui soit l'image d'une machine.

Diodore de Sicile, Hérodote, et Horapollon avouent que les Egyptiens se servaient de clepsydres pour diviser le temps. Ces instrumens leur offraient une mesure de la durée; et si on a objecté que cette mesure devait être inexacte, parce que la vitesse du fluide qui s'écoule varie

avec sa hauteur dans le vase, il était possible d'y maintenir un niveau constant, et c'est probablement ce qui a été fait.

On croit que ces nombreux obélisques, répandus sur le sol de l'Égypte, élevés en l'honneur du soleil, et dont plusieurs ont été transportés à Rome, étaient employés, comme gnomons. Comme il n'est pas bien prouvé qu'on fût alors dans l'usage de les surmonter par un globe, on doit penser que la pénombre rendait ces instruments assez inexactes (*ibid.*, *Art. Anc.*, p. 321); ce qui n'est pas un motif de croire qu'on ne les ait pas employés. Mais ce fameux cercle d'Osymandias, dont la circonférence avait 365 coudées, et qui était réservé à des usages astronomiques, est-il pu avoir un plus utile et plus simple que de faire connaître les moments, et par conséquent de donner l'heure le jour aussi bien que la nuit?

On lit dans Ptolémée (*des Oracles qui ont cessé*, § 3), que les Égyptiens étaient dans l'usage de mesurer la hauteur du pôle avec une tablette en forme de toit, faisant un angle aigu avec un plan de niveau. On reconnaît ici le cadran équinoxial tracé sur un plan parallèle à l'équateur terrestre, qui est une suite naturelle de la connaissance de l'obliquité de l'écliptique. Qui croira, en effet, que des hommes qui faisaient de l'étude du ciel leur unique occupation, dont les monuments sont si exactement orientés, et pour lesquels la mesure du temps était si nécessaire, aient manqué d'un instrument aussi simple?

C'est donc à tort que Diogène Laërce attribue l'invention des cadrans solaires à Anaximandre, et Plin à Anaximène de Milet (vers l'an 600 avant J.-C.). Il est certain que, plus de 150 ans avant, ces cadrans étaient en usage dans la Judée, puisque Dieu fit rétrograder l'ombre sur le cadran d'Achaz (*). Au reste, il y a des cadrans solaires de tant de sortes, qu'un perfectionnement fait à l'un de ces instruments a pu être regardé par les Grecs comme une découverte nouvelle. Hérodote dit positivement que les Grecs reçurent les cadrans solaires des Babyloniens, et c'est probablement par cette voie que les Juifs eurent quelques connaissances astronomiques. On ne peut comparer le savoir des Grecs à celui des Égyptiens. Ceux-ci nous laissent des temples, des débris immenses, qui attestent leur splendeur antique et leur puissance; plusieurs de ces édifices sont astronomiques; et surpassent en grandeur tout ce que les hommes ont jamais exécuté; l'origine s'en perd dans la nuit des temps. D'un autre côté, les Grecs vont chercher en Égypte les connaissances de tout genre qui leur manquent; Orphée, Homère, Thalès, Eudoxe, Platon, Pythagore, y puisent l'instruction qu'ils ne peuvent trouver dans leur patrie; et c'est à ces voyages, autant qu'à leur génie, qu'ils doivent leur célébrité.

Les Romains n'ont jamais atteint les Grecs en éloquence, ni en architecture. Au rapport de Plin, c'est 300 ans avant J.-C. que Popilius Cursor fit construire à Rome le premier cadran solaire; encore indiquait-il mal les heures; et ce n'est que deux siècles avant les beaux jours de la république, temps où brillaient Cicéron, César et Caton, que Valérius Messala, dans la première guerre punique, rapporta de Sicile un cadran solaire, et le fit placer près de la tribune aux harangues.

À Rome et en Grèce, on s'est long-temps servi de gnomons: un esclave était préposé pour observer les progrès de l'ombre, et avertir du moment où elle avait la longueur fixe. Les Romains se servirent aussi des clepydres, et leur donnèrent même un grand degré de perfection: celle de Ctesibius a joui de quelque célébrité. L'eau s'échappait des yeux d'une figure, qui semblait payer un tribut de pleurs aux instans qui s'écoulaient. Le fluide, reçu dans un réservoir, y était vu une autre figure armée d'une baguette, pour indiquer les heures sur une colonne, laquelle, mue par l'eau, tournait sur son axe en un an. On lisait ainsi sous l'index le mois, le jour et l'heure. Ctesibius vivait 150 ans avant J.-C. (*voy. le Vitruve de Perrault*).

(*) *Isid.*, *l. 12*, c. 2; *l. 13*, c. 2; *l. 14*, c. 2.

CHAPITRE III.

§ I^{er}. DU TRACÉ DE LA PERSPECTIVE LINÉAIRE.

179. L'OBJET à mettre en perspective étant rapporté aux deux plans de projection horizontal et vertical, on suppose qu'on a déterminé, pour chaque partie de cet objet, le contour apparent, les lignes visibles qui ont pour limite ce contour, les lignes de séparation d'ombre et de lumière, les lignes contours d'ombres portées, les points brillans ; le tracé de la perspective ne dépend plus alors que de la forme du tableau et de sa position par rapport à l'objet et au spectateur.

La surface d'un tableau peut être plane ou courbe ; elle est courbe dans plusieurs circonstances, par exemple, lorsqu'il s'agit de décorer l'intérieur d'un édifice voûté, tel qu'un dôme dont la voûte est sphérique ou elliptique ; le plus souvent le tableau est plan. On le suppose ordinairement placé entre l'objet et le spectateur ; dans cette hypothèse, les dimensions du dessin sont plus petites que celles de l'original : elles seraient plus grandes, si le tableau était derrière l'objet par rapport au spectateur.

La position de l'œil par rapport au tableau, est donnée ; on le met ordinairement sur une perpendiculaire à la surface du tableau, passant par le milieu de cette surface : la distance de l'œil au tableau ne doit pas beaucoup différer de celle à laquelle on se tient d'un objet pour le voir distinctement. Le champ de la vue n'est pas seulement limité par la distance de l'œil à l'objet, mais encore par l'angle des rayons visuels extrêmes.

On voit confusément la partie d'un tableau placée hors du cône qu'a son sommet à l'œil, et dont le côté fait avec le rayon visuel dirigé vers le milieu du tableau, un angle plus grand que le demi-angle droit. La plus petite distance à laquelle on voit un objet distinctement est, pour les vues ordinaires, un décimètre. Un dessin réduit ne produirait plus l'effet de la perspective, si, d'après l'échelle de réduction, la distance de l'œil au tableau devenait moindre qu'un décimètre. Les points de vue pour les plus grands tableaux, tels que les toiles d'avant-scène des théâtres, ne sont pas à plus de quinze mètres du spectateur.

Lorsque la surface du tableau est un plan vertical, on le place ordinaire-

ment entre l'objet et le spectateur, de manière qu'il soit parallèle à l'horizontal qui passerait par les deux yeux du spectateur. D'après cette convention, on est dans l'usage, pour juger l'effet d'un tableau, de se placer parallèlement à son plan, de manière que l'œil soit à la hauteur de son centre; si le point de vue s'écarte sensiblement de cette position par rapport au tableau, la perspective prend le nom d'*anamorphose*. Nous ferons connaître dans ce chapitre les *anamorphoses* directes et par *réflexion*.

De la perspective d'un système de points sur un tableau plan et vertical.

189. Chaque point à mettre en perspective est déterminé par ses projections sur deux plans, l'un horizontal, l'autre vertical : le plan vertical du tableau est donné par sa trace sur le plan horizontal. On projette les rayons visuels dirigés vers les points donnés, sur un plan vertical perpendiculaire au plan du tableau. L'œil, considéré comme un point, étant donné par ses projections, les projections horizontales et verticales des rayons visuels, sont déterminées. Chacun de ces rayons est coupé par le plan du tableau en un point, qui est la perspective du point d'où part le rayon visuel. Pour construire ce point sur le tableau même, on connaît la verticale du point du tableau qui le contient, et sa distance à la trace horizontale de ce plan; d'où il suit qu'en regardant cette trace comme une ligne d'abscisses, et les distances des points du tableau à cette trace comme des ordonnées, la perspective de chaque point est déterminée par une abscisse et une ordonnée connues.

De la perspective d'une ligne droite ou courbe, sur un tableau plan ou courbe.

191. On divise la ligne courbe donnée en un nombre de parties assez grand pour que chaque partie puisse être considérée comme une petite droite. Les rayons visuels, dirigés de cette ligne vers l'œil, forment une surface conique, dont la courbe d'intersection par la surface du tableau, est la perspective de la ligne. Cette courbe passe par les perspectives des points de division de la ligne proposée, c'est-à-dire par les intersections des rayons visuels dirigés de ces points vers l'œil, et de la surface plane ou courbe du tableau; intersections qu'on trouve par la méthode exposée liv. 1^{re}, page 38.

Lorsque la ligne en perspective est une droite, le cône des rayons visuels devient un plan.

On nomme ligne *originale* ou *solide originale*, la ligne ou le solide qu'il s'agit de mettre en perspective.

De la perspective des droites parallèles; de la perspective d'un système de points, par la méthode dite des points de concours.

182. Le plan mené par l'œil du spectateur et par une droite, coupe la surface du tableau suivant une ligne qui est la perspective de la droite. Dans le cas où plusieurs droites données sont parallèles, les plans ainsi menés passent par une droite qui leur est parallèle; si cette droite, qui passe aussi par l'œil, rencontre la surface du tableau prolongée indéfiniment, le point de rencontre se nomme *point de concours* des perspectives des droites parallèles données. Lorsque la surface du tableau est plane, ces perspectives ont nécessairement un point de concours, à moins que les droites parallèles entre elles, le soient en même temps au tableau.

183. Pour mettre en perspective un système de points; par exemple, les sommets des angles de prismes ou de parallélépipèdes à faces parallèles, on regarde chaque sommet comme l'intersection de deux droites parallèles aux arêtes des prismes, et on mène par l'œil du spectateur deux autres parallèles à ces arêtes. Ces dernières droites coupent la surface plane du tableau en deux points, qui sont les *points de concours* de toutes les droites qui leur sont respectivement parallèles. Mais les deux droites menées par le point qu'on veut mettre en perspective, rencontrent aussi le tableau en deux points qui sont déterminés; les deux droites qui joignent ces derniers points et les points de concours des droites menées par l'œil, se coupent; le point d'intersection est la perspective du point, qui est par hypothèse le sommet d'un angle d'un prisme donné.

Cette méthode pour mettre en perspective un système de points sur un tableau plan, consiste à regarder chaque point comme le sommet d'un triangle dont les côtés parallèles à deux droites données, coupent le tableau en deux points, et qui a pour base la distance de ces deux points. La perspective de ce triangle est un autre triangle de même base, dont les côtés passent par les points de concours des deux droites données; le point du tableau où ces côtés se rencontrent, est la perspective du sommet du premier triangle.

On se sert depuis long-temps de cette méthode des points de concours, pour mettre en perspective des édifices et autres monumens d'architecture. On en fait aussi usage dans les ateliers où l'on exécute les décorations de théâtre.

De la perspective d'un solide.

184. La perspective d'un solide à faces planes ou courbes comprend la perspective des points *brillans*, et celle des lignes suivantes: 1° le contour apparent; 2° les lignes visibles renfermées dans ce contour, parmi lesquelles se trouvent les lignes de séparation d'ombre et de lumière, et les lignes contours d'ombres portées.

On a exposé (art. 170) une méthode générale applicable à une surface quelconque, pour trouver les contours apparens et les lignes de séparation d'ombre et de lumière dans l'hypothèse d'un point lumineux unique, ou de rayons lumineux parallèles. Une autre méthode non moins générale donne les perspectives des contours apparens, en considérant ces lignes comme des courbes tangentes aux projections des génératrices de la surface proposée sur le plan du tableau, et en supposant que ces projections soient faites par un système de droites concourantes vers l'œil; d'où il suit que la perspective d'un solide quelconque se composera de lignes que l'on construira par points, ainsi qu'on l'a expliqué (art. 180-183.), et de lignes tangentes à d'autres lignes connues sur le tableau.

Mais lorsque le solide proposé sera terminé par une surface appartenant à l'un des trois genres de surfaces que nous avons considérées dans le § III (p. 208-216) de ce chapitre, les contours apparens et les lignes de séparation d'ombre et de lumière seront déterminés par des constructions plus simples, d'une exécution plus exacte, puisqu'on aura deux projections orthogonales de ces lignes; il sera alors préférable de mettre chaque point de ces lignes en perspective par la méthode générale, ou par celle des *points de concours* (art. 180-183.).

PREMIER EXEMPLE DE PERSPECTIVE LINÉAIRE, PAR LA MÉTHODE GÉNÉRALE.

Perspective d'un cylindre posé sur un socle (Pl. 9. P., fig. 1, 2, 3).

185. Le socle est un prisme à base carrée ABDE (fig. 1), dont la hauteur est *aa'* ou *bb'* (fig. 2); le cylindre a pour base inférieure le cercle (FGIH, *ih*), et sa hauteur est mesurée par les verticales *ii'*, *hh'* (fig. 2).

On suppose le tableau vertical; ses traces données sur les plans de projection sont les droites PQ (fig. 1), *pq* (fig. 2). La position de l'œil du spectateur est déterminée par ses deux projections Q et *o* (fig. 1 et 2).

Perspective du socle.

Le contour apparent du socle est formé des deux horizontales inférieures (AD, ad), (AE, ae), des trois verticales (A, aa'), (D, dd'), (E, ee'), et enfin des quatre côtés du carré supérieur ($ABDE, a'b'$). Les rayons visuels menés de l'œil vers les extrémités de ces droites, sont déterminés par leurs projections horizontales et verticales; ils rencontrent le plan du tableau (PQ, pq) en des points que l'on rapporte à l'horizontale PQ et à une verticale menée par un point quelconque de cette horizontale. Transportant l'horizontale PQ (*fig. 1*) en PQ , sur le développement (*fig. 3*) du tableau, on construit la perspective d'un point quelconque tel que (A, a'), en menant le rayon visuel (OA, oa'), qui coupe le tableau au point (A', a''), et en rapportant ce point sur le plan du tableau (*fig. 3*). La droite $A'A''$ de cette *fig. 3* étant prise pour la verticale qui passe par le point A' (*fig. 1*), il n'y a aucun point de la perspective qui ne soit déterminé par deux droites rectangulaires parallèles l'une à PQ (*fig. 3*), l'autre à $A'A''$. Ainsi, le rayon visuel (OA, oa') (*fig. 1* et 2), étant coupé par le plan du tableau en un point (A', a'') distant de l'horizontale PQ (*fig. 1*), de la quantité pa'' (*fig. 2*), on porte cette distance en $A'a'$ (*fig. 3*) sur la droite $A'A''$, et le point a' est la perspective du point (A, a'); on aurait de même la perspective b' (*fig. 3*) du point (B, b') (*fig. 1* et 2), en portant pb'' (*fig. 2*), sur $D'b'$ (*fig. 3*).

Perspective du cylindre.

Le contour apparent du cylindre est formé de deux droites de ce cylindre, qu'on détermine en menant par l'œil deux plans tangents à sa surface. Ces plans ont pour traces horizontales les droites OF, OG (*fig. 1*), tangentes au cercle $FGHI$. Les points de contact F, G sur ce cercle, sont les projections horizontales des droites du contour apparent, et parce que le point O est sur une perpendiculaire KK' abaissée du centre K du cercle sur la trace horizontale PQ du tableau, les verticales F, G du cylindre se projettent sur le plan vertical XY (*fig. 2*), suivant une seule droite ff' . Les perspectives de ces verticales ff', ff' (*fig. 3*) se construisent comme les perspectives des arêtes verticales du socle.

La portion visible du cercle inférieur du cercle, a pour projection horizontale l'arc FGH (*fig. 1*), et pour perspective l'arc d'ellipse $\phi\lambda\gamma$. Le cercle supérieur n'est aussi visible qu'en partie, et sa perspective est l'ellipse $\phi\lambda'\gamma'$, intersection du cône optique qui a pour base le cercle ($FGHI, I'H$), par le plan du tableau.

• DEUXIÈME EXEMPLE.

De la perspective du piédoche. (Pl. 10. P. fig. ti, v, p.)

186. Le piédoche, qu'on emploie ordinairement comme support d'un buste ou d'un vase, est un solide de révolution composé d'une plinthe, d'une scotie et d'un filet. L'axe de révolution du piédoche étant (*pl. 10. P.*) la verticale *aa'* du plan vertical *XY* (*fig. v*), la ligne génératrice de ce solide est formée des deux verticales *ee'*, *kk'*, et d'un arc d'ellipse *enk* qui coupe ces verticales à angle droit, aux points *e*, *k*. Cette ligne, en tournant autour de la droite *aa'*, engendre la surface du piédoche. La plinthe et le filet du piédoche sont des cylindres qui ont respectivement pour bases les cercles *EFGH*, *IKLM* (*fig. h*), et pour hauteurs les verticales *ee'*, *kk'* (*fig. v*).

Le tableau est un plan vertical *CBD* (*fig. h*), perpendiculaire au plan méridien *ABB'* mené par l'œil du spectateur; la trace *dd'* du tableau sur le plan vertical *XY* (*fig. v*), parallèle à ce plan méridien, est la projection verticale de toutes les lignes droites ou courbes tracées sur le tableau.

Prenant pour unité de longueur le diamètre *EF* (*fig. h*) de la plinthe, l'œil est, dans cet exemple, à la distance 3 de l'axe du piédoche; sa hauteur au-dessus du plan horizontal, est de 1. Ces deux dimensions déterminent, sur les plans horizontal et vertical, les points vers lesquels concourent les projections horizontales et verticales des rayons visuels. Quoique ces points soient au-delà du cadre de la *planche*, on les conçoit facilement sur les prolongemens des droites projections des rayons visuels; ces droites n'ont pas été prolongées, afin de réduire les dimensions de la planche de cuivre. Ainsi les deux droites *RB'*, *UU'*, tangentes au cercle du diamètre *EF*, concourent vers la projection horizontale de l'œil, située sur la droite *ABB'*. La circonférence dont le centre est sur cette droite, et qui a pour diamètre la distance de l'œil au tableau, coupe les cercles des rayons *AG*, *AL* aux quatre points *R*, *S*, *T*, *U*, qui sont les projections horizontales de quatre droites verticales. Ces droites, qui forment le contour apparent des surfaces cylindriques de la plinthe et du filet du piédoche, ont pour projections verticales les droites *ru*, *st*. Le contour apparent de la surface de révolution, qui termine la scotie, a pour projections, les lignes (*ab's*, *a'b's'*) que l'on construit par les méthodes que nous avons exposées (art. 116-118). Le piédoche étant éclairé par des rayons de lumière parallèles entre eux, et dirigés suivant la droite (*xy*, *x'y'*) (*fig. h* et *v*), les mêmes méthodes donnent les projections horizontale et verticale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface de la scotie.

Dans la même hypothèse des rayons de lumière parallèles, on construit

(art. 174) les deux courbes dont les projections horizontale et verticale déterminent les projections π, π' (fig. h et v) du point brillant de la surface de la scotie. Considérant les cônes dont le sommet est l'œil du spectateur, et qui ont pour bases 1° les contours apparens des cylindres qui forment la plinthe et le filet; 2° les cercles qui terminent ces cylindres; 3° le contour apparent de la scotie; 4° les lignes de séparation d'ombre et de lumière sur les cylindres et sur la scotie; les sections de ces cônes par le plan vertical CD du tableau, forment sur le plan développé (fig. p), la perspective du piédoche. L'intersection du tableau et du rayon visuel dirigé vers le point brillant (π, π'), détermine la perspective π'' (fig. p) de ce point.

Des projections du contour apparent.

187. Le contour apparent déterminé par ses deux projections $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ (fig. h, v) à plusieurs points remarquables : 1° ceux qui sont situés dans le plan méridien ABB' passant par l'œil du spectateur. On mène par la projection de l'œil sur le plan vertical XY parallèle à ABB' les tangentes $a'a''$, $b'b''$ aux arcs d'ellipses $line$, iqf ; les points de contact a' , b' se projettent sur le plan horizontal (fig. h) aux points α , β ; ce qui détermine les points (α, α'), (β, β') du contour apparent, et fait voir (art. 155) que ce contour a tous ses points entre les cercles de la surface de révolution des rayons Aa, Aa' (fig. h) 2°

2° Les points situés dans le second plan méridien GAH, perpendiculaire au premier ABB' passant par l'œil.

Le plan horizontal mené par l'œil, coupe la verticale aa' en un point z , par lequel on mène les tangentes zn , zq aux arcs d'ellipse de la section méridienne de la surface; les deux points de contact n , q sont les extrémités du diamètre npq d'un cercle dont la projection horizontale NOPQ coupe la droite GAH aux points O, P; ce qui détermine les points (O, p'), (P, p') du contour apparent.

3° Les points (O', p'), (P', p') de ce contour, situés sur le cylindre vertical qui a pour base le cercle RASTU; ces points sont situés sur le cercle du diamètre $n'p'q'$, normale à la section méridienne de la scotie aux points n' , q' .

4° Les points les plus remarquables de la ligne du contour apparent, sont ceux pour lesquels les tangentes à cette ligne passent par l'œil du spectateur; les rayons visuels menés par ces points, appartiennent au cône qui a le contour apparent pour base, et de plus elles sont tangentes à cette base. La détermination géométrique de ces points est l'objet d'une note placée à la fin de ce livre (Voy. cette note); pour les déterminer graphiquement, on mène

ner par les projections horizontale et verticale de l'œil, des droites respectivement tangentes aux projections horizontale et verticale du contour apparent; les points de contact γ , δ de la projection horizontale, et le point γ' de la projection verticale, sont situés sur une perpendiculaire $\gamma\delta\gamma'$ à XY. Une autre perpendiculaire à XY contient les deux points de contact α , α' de la projection horizontale, et le point de contact ϵ' de la projection verticale; d'où il résulte que les rayons visuels des quatre points (α, α') , (δ, γ') , (α, ϵ') , (δ, ϵ') , sont des tangentes au contour apparent pour ces mêmes points. Les intersections γ' , δ' , ϵ' , α' de ces rayons par le plan du tableau (fig. p), sont des points de rebroussement de la perspective $\gamma'\delta'\epsilon'\alpha'$ du contour apparent. Les tangentes $\delta'\alpha'$, $\gamma'\epsilon'$ concourent en un point ω de la perspective de l'axe de révolution. On détermine ces tangentes en les considérant comme les intersections du plan du tableau et des plans tangents à la surface du filet menés par les points (γ, γ') , (δ, γ') , (fig. h, v). Chacun de ces plans, celui par exemple, qui est tangent à la surface au point (δ, γ') du contour apparent, coupe l'axe de révolution de cette surface au point (A, ω) ; le rayon visuel de ce point rencontre le tableau au point (B, ω') , qui devient sur le développement du tableau (fig. p), le point ω' , vers lequel concourent les tangentes $\delta'\alpha'$, $\gamma'\epsilon'$ aux points de rebroussement δ' , γ' du contour apparent.

Pour construire le point (A, ω) de l'axe de révolution, on amène le point (δ, γ') dans le plan méridien parallèle au plan vertical XY de projection, en décrivant du point A comme centre, avec A δ pour rayon, l'arc $\delta\delta'$. Cet arc coupe la trace horizontale du méridien ABB' au point δ' par lequel on mène la perpendiculaire $\delta'\delta''$ à XY. Cette perpendiculaire rencontre l'arc d'ellipse $\epsilon'n\epsilon'$ au point δ'' ; la tangente $\delta''\omega$ de l'arc, menée par ce point, est la trace du plan tangent à la surface de la scotie au point (δ, δ'') ; d'où il suit que ce plan, et tous ceux qu'on peut mener par les points du cercle du rayon A δ ou A δ' , rencontrent l'axe de révolution au même point (A, ω) .

Développement du tableau (fig. p), contenant la perspective linéaire du piédoche et de ses ombres.

188. Les projections horizontales et verticales des contours apparents de la plinthe et du filet du piédoche, déterminent les projections des rayons visuels menés par les extrémités des verticales qui forment ces contours. Les projections de ces rayons RR', rr'... (fig. h, v), coupent le plan CD du tableau en des points tels que (R, r') . La droite CD (fig. h) étant transportée en C'D' (fig. p), et le point R' (fig. h) en R' (fig. p), on porte les hauteurs verticales dr', du' (fig. v) en R'r' et R'r' (fig. p) et la droite r'r' est la perspective de la

verticale (R, ru) (*fig. h, v*) du contour apparent de la plinthe. On construit de la même manière (*fig. p*) les droites $u'u'$, $s's'$, $t't'$, qui sont les perspectives des trois autres verticales formant les contours apparens de la plinthe et du filet. Les cercles qui terminent ces deux parties du piédoche, ont pour perspectives les ellipses intersections du plan du tableau et des rayons visuels menés par les points de la circonférence de ces cercles. La première ellipse $r'f'u'$ n'est visible sur le tableau qu'entre les points de contact r' , u' de cette ellipse et des droites perspectives du contour apparent de la plinthe. La seconde ellipse $r'f'u'$ n'est aussi visible que jusqu'aux points 1, 2, où elle coupe la perspective du contour apparent de la scotie. La troisième ellipse est visible entre les points s' , t' de la perspective du contour apparent $s's'$, $t't'$ du filet. La quatrième ellipse $s't'$, perspective du cercle supérieur du filet, est vue en totalité.

La perspective totale du contour apparent de la scotie est une courbe à quatre branches et à quatre points de rebroussement $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ qu'on a déjà construits (art. 187). La branche $2'3'4'5'$, perspective de la partie ($2'2'$, $3'3'$) (*fig. h, v*) du contour apparent, est invisible. Les trois autres branches seraient visibles en totalité, si l'ellipse perspective du cercle inférieur du filet ne cachait pas toute la branche $4'5'6'$, et les parties $3'4'$, $4'5'$ des deux autres branches adjacentes.

De la perspective des ombres du piédoche.

189. Après avoir déterminé (art. 100) les projections horizontale et verticale de la courbe de contact de la surface de la scotie du piédoche et du cône ou du cylindre lumineux, on considère cette courbe comme la base d'un cône qui a pour sommet l'œil du spectateur. L'intersection de ce cône par le plan du tableau, donne (*fig. p*), pour la perspective de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la scotie, la ligne $abcdefghiklnca$, qui a deux nœuds c et k . Les lettres de la *fig. p*, sans l'exposant p , se rapportent aux perspectives des lignes de séparation d'ombre et de lumière, et des contours d'ombres portées. Le cercle inférieur du filet porte ombre sur la scotie, et la perspective du contour de cette ombre est la ligne nop qui a un nœud au point o .

La scotie porte ombre sur elle-même. Le cylindre des rayons lumineux, d'abord tangent à cette scotie, se prolonge et coupe sa surface suivant une ligne dont on construit les deux projections. La perspective de cette ligne se compose des deux parties gqr , ist (*fig. p*) d'une même courbe, tangentes à la perspective de la ligne de séparation d'ombre et de lumière aux points t , g ,

perspectives des points de la surface de la scotie, qui sont les limites du contour de l'ombre portée par la scotie sur elle-même.

Le piédoche étant éclairé par des rayons de lumière parallèles entre eux, les perspectives de ces rayons ont sur le tableau (*fig. p*) un point de concours (art. 182). En supposant que ce point soit déterminé, la droite menée (*fig. p*) par ce point et par un point quelconqué *r* de la courbe *gqr*, rencontrera la perspective *abcde.....* de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la scotie, et le point de rencontre sera la perspective du point de cette ligne, dont l'ombre sur la surface de la scotie, a pour perspective le point *r*.

Les lignes *vv', xy* (*fig. p*) sont les perspectives des droites qui forment sur la plinthe et sur le filet, les lignes de séparation d'ombre et de lumière.

On n'a point considéré (*fig. p*) les ombres portées par le piédoche sur le plan horizontal qui le supporte; mais ces ombres étant connues sur le plan horizontal (*fig. h*), le tracé de leurs perspectives ne présente aucune difficulté.

Il n'y a qu'une partie *efg* (*fig. p*) de la perspective de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la scotie, qui soit visible; le reste est caché par les courbes *gqr, noep*, perspectives des ombres portées sur la scotie par elle-même et par le cercle inférieur du filet.

§ II. EXEMPLES DE PERSPECTIVE LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE DES POINTS DE CONCOURS. (Pl. 11, P. 12. P. 13. P. 14. P.)

190. On a fait voir comment (art. 180) la perspective linéaire se déduit des deux projections de l'objet proposé sur deux plans rectangulaires, d'un horizontal et l'autre vertical. Les rayons visuels menés des points principaux de l'objet original vers l'œil du spectateur étant connus par leurs projections sur ces mêmes plans, l'intersection de ces rayons par le tableau, détermine la perspective de l'objet. L'application de cette méthode générale ne laisse rien à désirer, lorsque les objets à mettre en perspective n'ont que de petites dimensions; mais il y a des cas où le nombre et la grandeur des lignes de construction la rendraient impraticable. Supposons en effet qu'il faille exécuter les décorations d'un grand théâtre. On prend ordinairement la toile d'avant-scène pour tableau, et on suppose le spectateur placé immédiatement au-dessous de la première galerie ou des premières loges, et sur la ligne du milieu du parterre, perpendiculaire au tableau. La toile a ordinairement quinze mètres de largeur; le spectateur est en avant de cette toile d'environ le même nombre de mètres; en supposant la profondeur du théâtre de quinze

mètres, les décorations du fond seront à treute mètres environ du spectateur; les aires sur lesquelles on tracerait les projections orthogonales, auraient donc cette dimension dans le sens de la longueur, ce qui entraînerait des opérations graphiques longues et pénibles : c'est pour les éviter, qu'on emploie les points de concours. Ces points étant donnés sur le tableau, on peut mettre en perspective tous les objets réguliers, tels que les monuments d'architecture, dont les dimensions sont exprimées en nombres. Au moyen de ces nombres ou *cotes*, la projection perspective se construit directement sur le tableau, sans avoir recours aux deux projections orthogonales. On a déjà résolu plusieurs questions de géométrie descriptive pour lesquelles une de ces dernières projections se construit indépendamment de l'autre; les intersections cylindriques, coniques (art. 172 et 181, liv. I^{er}), en sont des exemples. La projection perspective peut aussi se déduire immédiatement des cotes qui fixent les dimensions de l'objet original, en faisant usage de la méthode des points de concours, dont nous avons exposé le principe art. 182.

Application du principe de la perspective par les points de concours.

191. La surface du tableau et sa position par rapport aux objets étant données, on conçoit par l'œil deux droites arbitraires, et par chaque point de l'espace à mettre en perspective, des parallèles à ces droites. Les perspectives de ces parallèles se coupent en un point, qui est la perspective du point de l'espace.

Lorsque le tableau est plan, les droites menées par l'œil coupent ce plan en deux points, qui sont respectivement les points de concours de leurs parallèles, et que je désigne par les lettres D et D'. Un point donné de l'espace est le sommet d'un angle dont les côtés parallèles aux droites menées par l'œil, coupent le tableau en deux autres points *d*, *d'*; joignant les points D et *d*, D' et *d'* intersections du plan du tableau et de deux droites parallèles entre elles, on a deux nouvelles droites qui se rencontrent, et le point de rencontre détermine la perspective du point de l'espace.

On peut supposer que le tableau soit un plan vertical, et que les droites menées par l'œil soient deux horizontales, l'une perpendiculaire et l'autre inclinée à 45° par rapport au tableau, la perspective d'un point quelconque de l'espace sera dans cette hypothèse l'intersection des perspectives de deux parallèles aux droites horizontales; ces parallèles, et la droite qui joint les points où elle rencontre le tableau, forment un triangle rectangle isocèle.

Pour donner un exemple de l'application du principe que nous venons

d'exposer, au cas particulier des droites parallèles horizontales, nous allons considérer un système de carrés horizontaux, dont les centres sont situés sur une verticale.

De la perspective des carrés par la méthode des points de concours. (Pl. 11. P.)

192. Soit un système de carrés horizontaux, dont les centres sont situés sur la verticale C (*pl. 11. P, fig. 1*), et supposons que les diagonales de ces carrés soient, en projection horizontale, les deux droites AB, DE. L'un de ces carrés a pour sommet un point A du tableau vertical PQ; le plan horizontal qui contient ce carré, est à une distance donnée du plan horizontal mené par l'œil du spectateur.

Le point O étant la projection horizontale de l'œil, les droites OP, OQ, OR parallèles perspectivement aux côtés AD, AE, et à la diagonale AB du premier carré ABCDE, déterminent sur le tableau les points de concours des parallèles aux côtés et à la diagonale de tout autre carré placé parallèlement au premier.

Soit (*fig. 2*) P'Q' l'horizontale intersection du plan vertical du tableau et du plan horizontal mené par l'œil; on prend sur cette droite les trois points P', Q', R' pour les points de concours des parallèles aux côtés des carrés AD, AE (*fig. 1*), et de la diagonale AB. Le sommet de l'angle du premier carré est sur une verticale donnée aA' (*fig. 2*), à une distance connue A'a de l'horizontale P'Q'. Menant les droites A'P', A'Q', A'R' (*fig. 2*), on a indéfiniment les perspectives des droites AD, AE et de la diagonale AB (*fig. 1*). L'arc de cercle décrit du point A comme centre avec AE pour rayon (*fig. 1*), coupe la droite PQ au point e, et la corde Ee de cet arc forme avec les droites AE, Ae un triangle isocèle, dont la perspective déterminera celle du point E. Portant le côté AE ou son égal Ae sur l'horizontale A'e' (*fig. 2*), et menant eS' vers le point de concours S' des parallèles à la corde Ee (*fig. 1*), le point E', intersection des droites e'S', A'Q', est la perspective du point E (*fig. 1*), intersection des droites Ee, EA. Tirant la droite E'B' vers P', et menant par le point B' où cette droite coupe A'R', une autre droite B'Q', on aura le quadrilatère A'B'D'E' pour la perspective du carré ABDE (*fig. 1*).

193. Ayant trouvé la droite A'E' pour la perspective du côté AE (*fig. 1*), nous allons construire les points de cette perspective qui correspondent à des points de division donnés sur la droite AE. On imagine sur cette droite un plan vertical, et dans ce plan un parallélogramme rectangle qui a la droite AE pour l'un de ses côtés. Ayant pris pour l'autre côté adjacent, une longueur arbitraire A'K (*fig. 2*), dirigée suivant la verticale A (*fig. 1*) du tableau, on

la divise en autant de parties égales qu'il y en a sur la droite AE. La droite KL, dirigée vers Q', coupe la verticale E'L au point L, ce qui donne le trapèze A'KLE' (fig. 2) pour la perspective du parallélogramme rectangle construit sur AE (fig. 1) et A'K (fig. 2) comme côtés. Par les points de division de la verticale A'K, on mène vers le point Q' les droites qui coupent la diagonale A'I du trapèze en des points, par lesquels on abaisse des parallèles à la verticale E'L. Ces parallèles rencontrent la droite A'E' en des points, qui sont les perspectives des points de division de la droite AE (fig. 1).

De la perspective du carré GHIF plus petit que le premier ABDE, et construit sur les mêmes diagonales. (Fig. 1 et 2, pl. 11. P.)

104. Le côté GH prolongé coupe le côté AE au point M, et on connaît en nombres le rapport de la droite AE' et de sa partie AM. On porte (fig. 2) de A' en N une partie semblable A'N (*) de A'K, et on mène vers Q' la droite Nn, qui coupe la diagonale A'L au point n. La verticale nM' coupe la droite A'E' au point M', perspective du point M (fig. 1) de la droite AE. On mène vers P' la droite M'H'G', qui rencontre la droite A'R' au point H'; les droites H'I'Q', H'G'P' coupent la droite D'E' aux points G', I', par lesquels on mène les droites G'F'Q', I'F'P', qui se rencontrent au point F' du quadrilatère F'G'H'I', perspective du carré FGHI (fig. 1) contenu dans le même plan horizontal que le premier carré ABDE.

Si le premier carré à mettre en perspective, au lieu d'avoir, comme le carré ABDE, l'un de ses sommets sur le plan du tableau, était placé comme le carré FGHI, on prolongerait la diagonale FH jusqu'au point A de la droite PQ, et on regarderait ce point comme le sommet d'un second carré ABDE de même centre que le carré proposé. Connaissant le côté AE ou AD, on construirait le trapèze A'B'E'D' (fig. 2), perspective du carré ABED, situé dans le même plan que le carré proposé FGHI.

On aurait pu supposer que le plan vertical du tableau passait par le centre C (fig. 1) du carré à mettre en perspective. La trace horizontale PQ deviendrait pq. Cette droite pq serait coupée par le côté BE ou FI du carré à mettre en perspective au point U ou V. Connaissant les distances CV ou CU, les points de concours des côtés des carrés et de l'une de leurs diagonales, la perspective du carré ABDE ou IFGI sera déterminée.

(*) La longueur A'N est le quatrième terme de cette proportion, dont les trois premiers termes sont connus :

$$AE : AM :: A'K : A'N.$$

De la perspective du carré FGHI contenu dans un plan horizontal, dont la distance au plan horizontal qui contient le premier carré ABDE, est donnée.

195. Le plan du carré FGHI (fig. 1) coupe la verticale A en un point dont la distance à l'horizontale PQ du tableau est donnée; portant cette distance sur la verticale A'a (fig. 2), du point a de la droite P'Q' en T, la droite TR' dirigée vers R' est indéfiniment la perspective de la diagonale FH (fig. 1) du carré proposé. En supposant ce carré et le premier carré ABDE dans le même plan horizontal, le côté GH prolongé coupe le côté AE au point M, distant du point A d'une quantité donnée AM. Portant cette distance en Am (fig. 1), et menant la corde Mm, la perspective du point M sera déterminée par les perspectives des deux droites AME et Mm. Menant (fig. 2) l'horizontale Tm' = Am (fig. 1), les droites TQ' et m'S', dirigées vers les points de concours Q', S', se coupent au point μ perspective du point M (fig. 1); d'où il suit que la droite $\mu P'$ (fig. 2) est la perspective indéfinie du côté GH (fig. 1). Mais cette droite coupe la perspective TR' (fig. 2) de la diagonale FH (fig. 1), au point h (fig. 2); donc ce point h est la perspective du point H (fig. 1). Menant hg, hi (fig. 2) vers les points de concours P', Q', et tirant les parallèles G'g, I'i à la droite A'a, qui coupent les droites hg, hi aux points g et i, on achèvera la perspective du carré FGHI (fig. 1), par les droites g'fQ', i'fP' qui se coupent au point f de la droite TR'. On remarquera que les deux points E', f sont sur une droite E'f parallèle à la verticale A'a.

On aurait pu déterminer la perspective μ (fig. 2) du point M (fig. 1) par une construction semblable à celle qu'on a faite (art. 194) pour trouver le point M' (fig. 2).

Des anciennes définitions, employées dans les divers traités de perspective.

196. Taylor (*), dans son *Traité de perspective*, appelle *plan objectif* le plan parallèle aux droites qu'il s'agit de mettre en perspective; *ligne de fuite* du *plan objectif*, l'intersection du plan du tableau et d'un plan parallèle au plan objectif mené par l'œil; *centre du tableau*, le pied de la perpendiculaire abaissée de l'œil sur le plan du tableau.

(*) Célèbre géomètre connu par le théorème fondamental de l'analyse mathématique; né en 1685, mort en 1731; son *Traité de perspective*, ouvrage fort estimé, a été traduit en français, l'année 1757. En 1748, l'abbé de la Caille a publié son *Traité d'optique*, qui contient de fort bons principes de perspective linéaire.

La ligne de fuite des carrés horizontaux que nous avons considérés (art. 192-195), est (fig. 2, pl. 11. P) l'horizontale P'Q'. Cette ligne contient six points de concours, savoir, les points de concours de deux diagonales, de deux côtés rectangulaires des carrés, et des cordes des angles que ces côtés font avec le tableau. Ces deux derniers points se nomment *points de concours des cordes*. Des six points de concours, quatre suffisent, en prenant pour l'un d'eux celui des côtés des carrés. On emploie de préférence les points de concours les plus voisins du centre du tableau. Dans le cas néanmoins où ils seraient hors du tableau, la géométrie fournit plusieurs moyens de mener des droites dont les prolongements passeraient par ces points.

De la perspective d'une suite de pilastres ou colonnes, dont les axes verticaux sont équidistants et situés dans un même plan. (Pl. 12. P.)

197. Soient (fig. 1, pl. 12 P), C, C', C'' les axes verticaux d'une suite de pilastres situés dans un plan vertical CC'C''; on prend pour tableau un plan vertical PQ passant par le premier axe C. Les sections horizontales des pilastres sont des carrés qui ont pour centres les points C, C', C'', et dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires à la droite CC'C''. Le point O étant la projection horizontale de l'œil, les points P, R, S, S' (fig. 1) sont respectivement les points de concours, 1° des côtés des carrés perpendiculaires à la droite CC'C''; 2° des diagonales de ces carrés parallèles à la droite ACB, et des cordes telles que KK', et MM', bases des triangles isocèles CKK' et CMM'. On rapporte ces points sur la ligne de fuite des horizontales, qui est sur le développement du tableau (fig. 2), la droite PSRS'. Le premier axe vertical C (fig. 1) étant à la distance CP du point de concours P, on porte cette distance (fig. 2) de P en d, et la verticale dc du tableau est la perspective du premier axe C (fig. 1). Le plan du carré ABDE coupe l'axe vertical C en un point distant de la ligne de fuite PS' (fig. 2) d'une quantité donnée; portant cette distance sur la verticale dc, l'extrémité c de cette verticale est la perspective du centre du carré ABDE (fig. 1). Le point K de ce carré étant l'intersection des deux droites CK, KK' (fig. 1), dont les perspectives concourent (fig. 2) vers les points P et S', les droites ck, k'S' se rencontrent au point k (fig. 2), perspective du point K (fig. 1). Le point k' (fig. 2), par lequel on mène la droite S'k'k, appartient à l'horizontale cq, parallèle à la ligne de fuite Pd'q', et on a ck' (fig. 2) = CK' (fig. 1).

On aura de même la perspective du point L (fig. 1) par l'intersection des deux droites k'L...S, cc'e'...q' (fig. 2), dirigées l'une vers le point S, l'autre vers le point de concours q' (fig. 2) des côtés AE, BD (fig. 1) du carré ABDE.

Le point M (fig. 1) a pour perspective le point m (fig. 2) intersection des deux droites $mm' \dots S$, $cc'e' \dots q'$.

Menant (fig. 2) les droites cbR , ke vers les points de concours R et q' , et les droites lbP , amP vers le point de concours P, les points a et b seront déterminés, et tirant les droites ae , bd vers le point de concours q' , on aura le quadrilatère $abde$ pour la perspective du carré ABDE (fig. 1).

198. Dans le cas où le point de concours q' serait trop éloigné, et hors du tableau, on pourra, sans y avoir recours, construire la perspective d'un point quelconque C' (fig. 1) de la droite CC'C'.

Ayant tracé le triangle isocèle C'CN rectangle en C, dont le côté $CN = CC' = CN'$, le point N est l'intersection des droites CN, NN', dont les perspectives concourent (fig. 2) vers les points P et S'. Tirant les droites n'S' et cP, leurs prolongemens se coupent au point n perspective du point N (fig. 1); mais le point C' (fig. 1) est l'intersection des deux droites NC', N'C', dont les perspectives n'R, n'S se coupent au point c' (fig. 2); donc ce point c' est la perspective du point C' (fig. 1). Joignant les points c , c' , la droite $cc'e' \dots$ (fig. 2) est la perspective indéfinie de la droite CC'C'... (fig. 1).

199. Formant (fig. 1) le carré CGUV, qui a pour centre le point u , on abaisse de ce point la perpendiculaire uT sur CC'C', et l'on porte $CT = \frac{CG}{2}$ en CT', pour déterminer la corde TT' parallèle à OS. Les deux droites $cc'e'$, $t'S$ (fig. 2), se coupent au point t , qui est la perspective du point T (fig. 1). Les droites tP, cR (fig. 2) se rencontrent au point a' , perspective du point u (fig. 2). Les droites ca' et $c'a'$ coupent les droites $c'v$, $c'u$ dirigées vers le point P, aux points v et u , qui sont les perspectives des points V' et U (fig. 1). Joignant les points v , u (fig. 2), la droite uv est la perspective de la droite UVX (fig. 1), parallèle à la droite CC'C', et distante de cette droite de la quantité $CU = CC'$.

La droite cR (fig. 2) coupe la droite uv au point x ; menant par ce point x la droite Px, qui rencontre la droite $cc'e' \dots$ au point c'' , ce point appartient à la perspective $c'd''$ de l'axe C' (fig. 1). De même, tirant $c'R$ et xP , cette dernière droite prolongée coupe la droite $cc'e'$ au point c''' de la perspective $c''d'''$ d'un axe C''' (fig. 1).

Toutes ces constructions dérivent du principe que nous avons exposé (art. 182 et 190), et qui consiste à regarder les points qu'il s'agit de mettre en perspective, comme les sommets d'angles dont les côtés sont parallèles à deux droites fixes, menées par l'œil du spectateur.

De la perspective des carrés qui ont leurs centres sur les axes verticaux C, C', C'' (fig. 1) de pilastres ou de colonnes dont les dimensions sont données (Pl. 12. P).

200. Nous avons construit (art. 194) la perspective $abde$ (pl. 12, fig. 2) du carré $ABDE$ (fig. 1). On sait (art. 194 et 195) comment on trouverait la perspective d'autres carrés $FGHI$, situés ou non dans le même plan que le premier, et dont les centres situés sur l'axe C , seraient à des distances données du premier centre e (fig. 2). Nous allons maintenant construire la perspective yz d'un carré YZ (fig. 1), dont le centre est en C' sur l'horizontale $CC'C''$. Les points Y et Z de ce carré sont les intersections des droites CY, YY' , et CZ, ZZ' , qui ont pour perspectives (fig. 2) cyc' et $y'y'S$, $c'z$ et $z'z'S$; d'où il suit que les points y, z sont les perspectives des points Y, Z . Tirant les droites yP, zP vers le point de concours P des côtés du carré, la droite $c'u$ vers le point u perspective du point U (fig. 1) de la diagonale $C'U$, la droite $c'R$ (fig. 2) vers le point de concours R de la diagonale $C'X$ (fig. 1); ces quatre droites comprennent entre elles le quadrilatère yzs' (fig. 2), qui est la perspective du carré YZ (fig. 1). Connaissant la perspective de ce premier carré, on construira (art. 195) la perspective de tout autre carré qui a pour côté la droite $C'J$, pour centre un point de l'axe C' , et dont le plan est parallèle à celui du premier carré.

On opérera de la même manière pour des carrés ou des parallélogrammes rectangles qui auront leurs centres sur l'axe C' , et dont les plans seront perpendiculaires à cet axe; d'où il suit qu'il n'y a aucun pilastre dont on ne puisse construire la perspective par la méthode que nous venons d'exposer.

Perspective de deux pilastres. (Fig. a, pl. 14. P.)

On voit (fig. a, pl. 14. P) la perspective de deux pilastres consécutifs; on y a marqué des mêmes lettres les points déjà trouvés (fig. 2, pl. 12. P).

Dans le cas où les verticales C, C', C'' , pl. 12. P, seraient les axes de colonnes, on aurait pour sections horizontales, à diverses hauteurs, des cercles, et on met chaque cercle en perspective par la considération de deux carrés à côtés parallèles, l'un inscrit, et l'autre circonscrit; les perspectives de ces deux carrés déterminent huit points et quatre tangentes de la courbe qui est la perspective du cercle.

De la perspective d'un cercle par la méthode des points de concours.
(Pl. 13. P, fig. 1 et 2.)

201. Soit LMNK (*fig. 1*, pl. 13. P), le cercle à mettre en perspective sur un tableau vertical PQ; on inscrit et on circonscrit à ce cercle deux carrés FGHI, ABDE, dont les côtés sont parallèles aux deux droites OP, OQ menées par l'œil O. Les points de concours de ces côtés, de la diagonale AB; des cordes parallèles KU, NT, sont respectivement les points P, Q, R, S' sur la ligne de fuite PQ. Rapportant cette ligne de fuite (*fig. 2*) sur le développement du plan du tableau, on construira sur ce plan développé (art. 192), les quadrilatères perspectives *fghi*, *abde* des carrés inscrits et circonscrits, et les droites *bn*, *nk* perspectives des droites LM, NK (*fig. 1* et 2), qui divisent les carrés chacun en quatre carrés égaux. Les quatre sommets *f, g, h, i* du premier quadrilatère appartiennent à l'ellipse perspective du cercle; les quatre côtés du second quadrilatère *abde* sont tangents à la même ellipse, aux points *k, l, m, n*, perspectives des points K, L, M, N (*fig. 1*), extrémités des deux diamètres rectangulaires LM, KN du cercle proposé. Huit points et quatre tangentes déterminent assez exactement le contour de l'ellipse perspective de ce cercle (*).

Conclusion.

202. Nous avons mis en perspective des carrés à côtés parallèles, qui ont leurs centres sur les axes des pilastres ou colonnes, et dont les plans sont horizontaux. On en déduit la perspective, 1° des parallélogrammes dont les côtés sont parallèles aux côtés des carrés; 2° des sections circulaires horizontales, qui ont leurs centres sur les axes: d'où il suit qu'ayant le dessin géométral d'un ordre quelconque d'architecture, on pourra en construire directement la perspective, en ne faisant usage que des cotes ou nombres qui fixent les dimensions des parties de cet ordre, et sans avoir recours à la combinaison des deux plans de projections orthogonales.

203. Le dessin perspective (pl. 18. P) a été construit d'après cette méthode,

(*) On démontre plusieurs propriétés très-remarquables des ellipses et d'autres sections coniques, en considérant ces lignes comme des perspectives de cercles; la théorie des transversales comprend des propositions qui sont des conséquences des principes de perspective appliqués aux lignes droites. Cette géométrie perspective a été traitée dans plusieurs ouvrages anciens et modernes fort estimés. Voyez la *Théorie des transversales*, par Carnot, et deux opuscules de MM. Serrois, Brianchon, professeurs des écoles d'artillerie (Paris, 1804 et 1817).

par M. Girard. Il représente un chapiteau dorique du théâtre de *Marcellus*, dont la *fig. a* fait voir la demi-section passant par l'axe. Ce chapiteau est composé de parties dont on a fait l'énumération (art. 177). Il diffère du chapiteau de la *pl. 16. O*, par les deux filets au-dessus du gorgerin, qui sont substitués au cavet.

Au-dessus du tailloir, composé du larmier, d'un talon et d'un filet, la *fig. a* donne le profil de l'architrave, de la frise, et du filet qui les sépare.

La hauteur verticale comprise entre les naissances du gorgerin et de l'architrave est d'un module. Le plan du tableau sur lequel on a construit la perspective (*pl. 18*), passe par l'axe vertical AB du chapiteau, et le module y est représenté par la partie *ab* de cet axe.

Le plan horizontal mené par l'œil coupe celui du tableau suivant la droite ARO, sur laquelle on donne la projection O de l'œil et un point de concours R des diagonales des carrés du chapiteau, qui ont leurs centres sur l'axe AB. La distance de l'œil au tableau est mesurée par la droite OO' (*hors du cadre de la planche*).

Avec ces données et l'échelle en module de la *fig. a*, on peut tracer le dessin perspective *pl. 18. P*. Le point *a* de l'axe vertical AB étant par hypothèse le centre du carré qui termine le filet du tailloir, le centre du carré inférieur du larmier est au point *c* de cet axe, distant du point *a* de la quantité *ac* donnée par le profil (*fig. a*), en parties du module *ab*. Ce carré a pour perspective le quadrilatère *defg*, dont la diagonale *de* concourt vers le point R de la ligne de fuite ARO. Le contour 1, 2, 3, 4, 5 est la perspective de la section par l'axe du chapiteau, dont le plan est parallèle à deux faces du larmier, lesquelles faces passent par les droites parallèles qui ont pour perspectives les côtés *df*, *ge* du quadrilatère *defg*.

§ III. DES ANAMORPHOSES. (Pl. 14. P, fig. 1. a, 1. b, 2. a 2. b.)

204. La plupart de ceux qui commencent l'étude de la perspective ne considèrent le tracé d'un dessin perspective que comme un simple problème de géométrie; ils n'ont point égard aux positions respectives des objets, de l'œil et du tableau: souvent ils placent l'œil du spectateur tellement près du tableau, que la perspective, quoique construite par les règles de la géométrie, paraît fautive. Elle l'est réellement dans ce sens, qu'un objet placé à la même distance du spectateur, ne lui présenterait qu'une image confuse. Il y a encore confusion dans l'image, lorsque le spectateur ne se place pas au point de vue pour lequel le tableau a été fait. On voit ordinairement des dessins fort irréguliers, dans les cabinets de physique, où l'on fait des expériences qui ont

seulement pour objet de produire des illusions, et d'inspirer au spectateur de la crainte ou de l'étonnement. Ces dessins, vus de face sur les parois du mur, ne présentent qu'une difformité choquante; mais si l'on regarde par une petite ouverture à travers une planchette placée d'équerre sur le mur, la difformité se change en un objet qui produit une surprise agréable. Cette perspective, qui n'est pas construite pour un point de vue placé sur la perpendiculaire élevée par son centre, se nomme *anamorphose*; on en trace les contours par les règles ordinaires. Ayant placé un petit dessin bien exécuté dans un plan perpendiculaire à la face peinte du mur, et très-près de ce mur, on regarde ce dessin comme la base d'un cône optique, dont l'intersection par le plan du mur, détermine la perspective linéaire dite *anamorphose*. Les rayons visuels de cette perspective étant très-inclinés par rapport au tableau, elle paraît difforme et très-irrégulière aux curieux qui ne sont pas prévenus qu'on s'est écarté de la règle ordinaire pour le placement du point de vue, et qui le cherchent à une certaine distance du mur, en face du tableau.

205. On réunit quelquefois dans un même cadre une perspective ordinaire vue de face, et deux perspectives anamorphoses vues de côté. Cette espèce de tableau se compose de lames étroites, de forme rectangulaire, placées à angle droit sur un plan. La première perspective est dessinée sur ce plan pour un point de vue situé sur la perpendiculaire au milieu du tableau. Chaque des deux autres perspectives est tracée pour un point de vue placé à droite ou à gauche du premier; de manière qu'un petit mouvement de tête amène l'œil dans la position convenable pour voir successivement trois objets différens.

206. Les anamorphoses sont directes ou réfléchies. Les premières se construisent comme les perspectives ordinaires; les secondes doivent être vues par réflexion: elles sont tracées sur un carton qu'on suppose éclairé. Les rayons de lumière qui partent du contour de chaque figure, se réfléchissent sur un miroir pour arriver à l'œil du spectateur. L'image régulière qui se réfléchit sur le miroir, détermine la figure irrégulière qu'on doit tracer sur le carton. Les miroirs dont on se sert ordinairement dans les cours d'optique, pour produire ces phénomènes, sont ou cylindriques, ou coniques, ou pyramidaux.

Une perspective étant donnée sur un tableau plan, on considère le point de vue de ce tableau comme le sommet d'un cône optique, qui a pour base le dessin perspective. L'intersection de ce cône et de la surface du miroir, doit produire sur l'œil le même effet que le dessin perspective: or, chaque rayon visuel se réfléchit sur le miroir en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion; donc la suite des rayons réfléchis d'après cette loi, forme une surface dont l'intersection par le plan sur lequel le miroir est posé, donne la

perspective *anamorphose* réfléchie. Les rayons de lumière, qui partiront des points de cette perspective, se réfléchiront vers l'œil du spectateur, et produiront la même image que le dessin *perspective* vu directement.

Exemple. On demande l'anamorphose par réflexion, qui fait voir un cercle sur un miroir cylindrique. Soient (*pl. 14. P. fig. 1. a. fig. 1. b*) ABCD, A'B'ab le plan et la coupe du miroir; la position de l'œil est donnée par ses projections O, o, situées sur une droite Oo perpendiculaire aux traces horizontales XY, EF du plan de la *fig. 1. b*, et du plan parallèle, tangent à la surface du miroir. On imagine sur ce dernier plan un cercle, du diamètre (IK, ik), qui a pour centre le point (C, c); le cône optique dont ce cercle est la base, et qui a son sommet au point donné (O, o), pénètre la surface du miroir suivant une courbe (ABCD, mm'm') (*). Chaque droite du cône, telle que (OM, om), se réfléchit suivant une autre droite (MN, mn), qui coupe le plan (*fig. 1. a*) de la base inférieure du miroir au point N. Ce point appartient à l'anamorphose PNQ du cercle. Les rayons de lumière qui partiront des points de la courbe PNQ, seront réfléchis par le miroir cylindrique vers l'œil (O, o) du spectateur, et produiront la même apparence que le cercle (IK, ik) vu directement.

La normale au point (M, m) de la surface du miroir étant horizontale, sa projection (*fig. 1. a*) LMa divise en deux parties égales l'angle OMN, qui a pour côtés les projections horizontales MN, MO d'un rayon incident sur le point (M, m) du miroir cylindrique, et de ce rayon réfléchi vers l'œil (O, o). La droite (OM, om) coupe le plan horizontal au point H, par lequel on mène la droite HN parallèle à Ml, qui coupe la droite MN au point N de l'anamorphose.

La même construction s'applique au miroir conique (*fig. 2. a. 2. b*); ABCD est la base du miroir, A'B' sa section par le plan vertical AIB; l'œil est sur le plan vertical OCLD, au point (O, o) de ce plan. On imagine un cercle (IK, ik) dans un plan vertical EF perpendiculaire à la droite OIL. Le cône optique qui a pour base ce cercle, pénètre la surface du miroir suivant la courbe (MM'M', mm'm'). Les droites de ce cône se réfléchissent et forment une surface réglée, dont l'intersection NPQ par le plan de la base inférieure du miroir, est l'anamorphose du cercle (IK, ik).

(*) La courbe *mm'm'* (*fig. 1. b*), distincte du cercle *ik* au-dessous du diamètre *ik*, se confond avec lui dans la partie supérieure. En opérant sur une plus grande échelle, on éviterait cette confusion.

§ IV. DE LA PROJECTION PERSPECTIVE, dite PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE.

(Pl. 31 du 1^{er} livre.)

207. Ce mode de projection n'est en usage que pour indiquer sur une carte, qu'on appelle *mappemonde*, la position respective des lignes tracées sur la surface de la terre, et des points remarquables du globe, déterminés par les intersections de ces lignes.

Considérant la surface de la terre comme sphérique, on la divise par deux systèmes de plans; les uns *méridiens*, passant par l'axe de la terre; les autres *perpendiculaires* à cet axe, ou parallèles à l'équateur. Une mappemonde est un plan sur lequel on a projeté les deux systèmes de cercles; savoir, les méridiens et les parallèles à l'équateur. Les géographes emploient pour la construction des cartes plusieurs modes de projection, parmi lesquels on doit distinguer celui qui jouit de ces deux propriétés très-remarquables :

1^o Qu'un cercle quelconque de la sphère se projette suivant un autre cercle;

2^o Que l'angle de deux tangentes à la sphère ne diffère pas de sa projection.

On satisfait à ces deux conditions en prenant pour plan de projection, celui d'un grand cercle de la sphère, et en faisant concourir les droites de projection vers l'extrémité du rayon perpendiculaire au plan de ce grand cercle. Considérant cette extrémité du rayon comme un point de vue, le plan du grand cercle comme un tableau, les droites de projection comme des rayons visuels, la projection dite *stéréographique*, est un dessin de perspective linéaire: nous allons démontrer les deux propriétés qui distinguent cette projection.

208. Soit (*fig. 5*, pl. 31 du livre 1^{er}) ABOE le grand cercle d'une sphère, dont le plan passe par les trois points O, C, D, qui sont respectivement le point de vue, le centre de la sphère, et le centre d'un cercle quelconque de la sphère à mettre en perspective. Ce plan est perpendiculaire au tableau et au plan du cercle donné à mettre en perspective, puisqu'il contient deux droites OC, CD, dont l'une est par hypothèse perpendiculaire au plan du tableau; l'autre joignant le centre de la sphère et le centre du cercle donné, est aussi perpendiculaire au plan de ce cercle; d'où il suit que le plan du grand cercle ABEFO contient la section principale EOF (art. 205, liv. 1^{er}) du cône oblique, qui a pour sommet le point de vue O, et pour base le cercle du diamètre EF, dont le plan EF fait avec le côté OE de la section principale, l'angle OEF; mais le plan AefB du tableau perpendiculaire au plan de la section principale, fait avec l'autre côté OF de cette section un angle FfB, qui est égal au premier EOF, parce qu'ils ont tous deux pour mesure la moitié d'un quart de circonférence AO ou OB, plus la moitié de l'arc BF; d'où il suit (art. 205, liv. 1^{er}) que le plan AefB coupe le cône oblique suivant un cercle du diamètre ef, qui est

la perspective du cercle du diamètre EF. Cette conclusion s'applique à tout autre cercle; il est donc démontré que tous les cercles de la sphère seront représentés par des cercles sur la mappemonde construite par la projection stéréographique.

209. La seconde propriété de la projection stéréographique consiste dans l'égalité de deux angles, l'un formé par les tangentes à la surface de la sphère, l'autre par les projections stéréographiques de ces tangentes. Cette propriété se démontre de la manière suivante :

Soit COE (fig. 6, pl. 31) le plan mené par le centre de la sphère, par le point de concours O des lignes de projection, et par le sommet E de l'angle proposé. Ce plan coupe la sphère suivant le grand cercle ABOE du diamètre AB, et le plan de l'angle des deux tangentes, suivant EG perpendiculaire au rayon CE. La droite OE coupe le diamètre AB au point e, qui est évidemment la projection stéréographique du sommet E de l'angle des deux tangentes à la surface de la sphère.

Considérant le plan des trois points C, O, E comme vertical, le plan horizontal qui passe par le diamètre AB, contient le grand cercle ABOE de la sphère, et coupe le plan des deux tangentes suivant la droite GH'; or ces tangentes ne peuvent rencontrer le plan du grand cercle ABOE qu'en deux points tels, que H, H' de la droite GH', et la droite HH' qui joint ces deux points, est le côté commun à deux triangles qui ont leurs sommets, l'un au point donné E de la surface de la sphère, l'autre à sa projection perspective e ou e'; mais ces deux triangles sont égaux; car, à cause de l'égalité des angles EeG, eEG, les droites EG et eG sont égales; donc l'angle qui a son sommet au point E, et dont les côtés passent par les points H, H', est égal à l'angle dont le sommet est au point e' projection stéréographique du point E, et dont les côtés passent par les mêmes points H, H' (*).

210. Il résulte de ces deux propriétés qu'un triangle formé sur une sphère par trois arcs de cercle assez petits, pour que chacun diffère peu de la ligne droite, et le triangle qui est sa projection stéréographique, sont deux figures presque semblables.

(*) M. Lacroix, dans son *Introduction à la géographie* (seconde édition, Paris, 1811), et postérieurement MM. Puissant, Delambre, ont donné dans leurs ouvrages une démonstration à peu près semblable, fondée sur la considération de l'égalité des deux droites EG, eG (fig. 6, pl. 31).

On lit dans l'*Astronomie* de Delambre, tome III, que le plus ancien ouvrage à la connaissance de ce savant érudit, qui ait fait mention de la seconde propriété de la projection stéréographique, est un *Traité de navigation* de Robertson, imprimé en 1754. La première propriété était connue du temps de Ptolémée.

Construction stéréographique d'une mappemonde sur le plan d'un méridien.
(Fig. 7, pl. 31 du 1^{er} livre.)

211. Soit $PP'a.0^{\circ}.30''...$ (fig. 7, pl. 30), le cercle de la sphère terrestre, contenu dans le plan d'un premier méridien; on divise sa circonférence en quatre parties égales, par les droites PP' et $a.0^{\circ}$, qui représentent l'une l'axe de la terre, et l'autre la trace de l'équateur terrestre sur le plan du premier méridien. On subdivise chaque partie en 90 degrés. Soient $0^{\circ}, 30^{\circ}, 60^{\circ}...$, a, b, d , les points de division qui déterminent les parallèles à l'équateur, des diamètres $b.30^{\circ}, d.60^{\circ}...$; les mêmes points déterminent les méridiens terrestres, dont les plans font avec le plan du premier méridien des angles mesurés par les arcs $ab, bd...$ Il s'agit maintenant de construire la projection stéréographique des méridiens et des parallèles à l'équateur.

Projection stéréographique d'un parallèle à l'équateur.

212. Le parallèle d'une latitude donnée, 30° par exemple, coupe le premier méridien aux deux points 30° et b (fig. 7); d'où il suit que la projection de ce parallèle, ou sa perspective sur le premier méridien qu'on prend pour tableau, passe par ces points.

Considérant le plan du premier méridien comme un plan horizontal, le plan vertical PP , mené par l'axe de la terre, coupe le parallèle à l'équateur en un point, et pour mettre ce point en perspective, on abat le plan vertical sur le plan horizontal. Le point du parallèle situé au-dessus du premier méridien, et à 90° des points b et 30° , s'applique en 30° , et le point de vue situé au-dessous du premier méridien, au point a extrémité du rayon Ca . Menant le rayon visuel $a.30^{\circ}$, qui coupe la droite PP' du tableau au point f , les trois points $30^{\circ}, b, f$ déterminent l'arc de cercle $bf.30^{\circ}$, qui est la perspective du demi-parallèle à l'équateur, situé au-dessus du premier méridien, dont la latitude est de 30° .

Projection stéréographique d'un méridien.

213. Prenons pour exemple le méridien de la longitude ab , dont le plan fait avec celui du premier méridien, l'angle mesuré par l'arc ab .

Le plan de l'équateur $aC.0^{\circ}$ étant abattu sur celui du premier méridien, l'intersection de ces deux plans prend la position Cb ; le point de vue s'abat en P' , et le rayon visuel $P'b$ du point b du méridien, coupe la droite Ca du tableau au point e , perspective du point b . Les trois points P, P', e détermi-

neut l'arc de cercle $PP'e$, perspective du demi-méridien de la longitude ab situé au-dessus du premier méridien.

On déterminera de la même manière l'arc PgP' , perspective du méridien de la longitude ad . Tous les arcs perspectives des méridiens passeront évidemment par les pôles P, P' , et auront leurs centres sur le diamètre aC .^o intersection du premier méridien et de l'équateur terrestre.

Des tangentes aux projections stéréographiques des méridiens et des parallèles à l'équateur.

214. Les parallèles à l'équateur coupent le premier méridien à angle droit; or, l'angle de deux cercles quelconques de la sphère terrestre, ne diffère pas de sa projection stéréographique (art. 208); donc la perspective bf 30^o d'un parallèle rencontre à l'angle droit le premier méridien aux points b et 30^o ; d'où il suit que les rayons Cb et $C. 30^o$ sont tangens à l'arc bf 30^o . Par la même raison, la tangente Pp au premier méridien, et la droite Pb tangente à la perspective PeP' du méridien de la longitude ab , comprennent entre elles l'angle bPq , qui a pour mesure la moitié de l'arc Pdb double de la longitude ab . L'angle de deux tangentes Pb, Pb' aux perspectives PeP', PgP' de deux méridiens quelconques, est égal à l'angle des plans de deux méridiens.

215. La fig. 8 (pl. 31) est une mappemonde sur l'horizon d'un lieu dont la latitude est donnée. Le plan de l'horizon passe par le centre de la terre; la verticale menée par ce centre, coupe la sphère terrestre au point de vue. La ligne des pôles étant donnée de position par rapport au plan de la carte, la perspective du pôle situé au-dessus de ce plan, est le point de concours des perspectives des méridiens visibles sur la carte.

216. Les deux propriétés de la projection stéréographique réunies, n'appartiennent qu'à la surface de la sphère; mais la première qu'on a démontrée (art. 207), a également lieu pour l'ellipsoïde de révolution, pourvu qu'on place l'œil à l'extrémité de l'axe de révolution. Toutes les sections planes de l'ellipsoïde vues de ce point, et projetées sur le plan de l'équateur, doivent paraître des cercles. Cette proposition nous ayant été communiquée par M. Legendre, nous avons démontré qu'elle avait encore lieu pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux, en projetant les sections planes de cette surface sur l'un des plans parallèles aux deux systèmes de cercles dont cette surface se compose, et en faisant concourir les lignes de projection, vers l'extrémité du diamètre qui passe par les centres des cercles parallèles au plan de projection. (Voyez la *Correspondance sur l'École polytechnique*, t. I, p. 76, juillet 1805.)

Notice sur les diverses projections employées pour la construction des mappemondes et des cartes géodésiques.

217. On trouve, dans l'introduction à la géographie, par M. Lacroix (deuxième édition 1811), des notions précises sur les divers modes de projections employés par les géographes. Après avoir défini la projection stéréographique, il fait mention d'une autre projection perspective, dont M. de Prony avait eu l'intention de se servir pour les cartes du cadastre. Le point de vue serait au centre de la sphère, et on prendrait pour tableau un plan tangent à la sphère. Il définit la projection *orthographique*, dans laquelle les méridiens et les parallèles sont projetés orthogonalement sur un plan, suivant des ellipses, lesquelles deviennent des cercles ou des lignes droites, lorsque le plan de projection est parallèle à l'équateur. La Hire a modifié la projection orthographique, en plaçant l'œil sur le prolongement du rayon de la terre perpendiculaire au plan diamétral de la carte, à une distance de la surface de la sphère terrestre, égale au sinus d'un demi-angle droit mesuré en parties du rayon de cette sphère.

M. Lacroix nomme *projections par développement* celles qui se font en assimilant des portions de la surface terrestre à des zones de surfaces développables. La plus simple de ces projections se nomme *projection conique*; elle se construit, en supposant que la zone terrestre, comprise entre deux cercles de latitude, est une portion de cône droit tronqué. Cette hypothèse approche d'autant plus de la vérité que la carte embrasse moins d'étendue en latitude. M. Lacroix a fait connaître d'autres projections du même genre proposées par Bion, Arrowsmith, Flamsteed, Nolin, Delisle, Dapville, Delorgna et Cagnoli. Les opérations, effectuées dans le siècle précédent pour déterminer la figure de la terre, par la mesure des degrés du méridien et des parallèles, ont fait naître, dit M. Lacroix, une espèce de projection très-importante, puisque c'est celle de la grande carte de France de MM. Cassini, le plus beau travail géographique qu'on ait exécuté jusqu'ici. (Voyez les *Mémoires de Cassini*, Académie des sciences, 1745, et le *Traité de géodésie* de M. Puissant, officier supérieur au corps royal des ingénieurs géographes, deuxième édition, 2 volumes in-4°, Paris 1819.)

NOTES.

NOTE I^{re}.

Article 100, livre I^{er}, page 58. — *Développement de surfaces.*

M. Lacroix a donné, dans un *Mémoire* présenté à l'Académie des sciences en 1790, la solution analytique du problème suivant : « Une courbe quelconque étant tracée sur une surface développable, trouver ce qu'elle devient dans le développement de cette surface; et, réciproquement, une courbe étant tracée sur un plan, trouver ce qu'elle devient, lorsqu'on enveloppe ce plan sur une surface donnée. »

Il a aussi publié cette solution dans le premier volume de son grand *Calcul différentiel*, in-4°, page 636.

NOTE II.

Après l'article 39, livre II, page 158. — *De l'hélice et de la surface hélicoïde.*

Une droite étant fixe, on conçoit une courbe mobile, dont chaque point décrit une hélice sur un cylindre à base circulaire, lequel a pour axe la droite fixe, et pour rayon, la distance du point de la courbe à cette droite; le lieu géométrique des hélices de même *pas* (art. 36, liv. II), décrites simultanément par tous les points de la courbe, se nomme *surface hélicoïde*; la droite fixe est *l'axe* de cette surface. La voûte qui supporte les marches d'un escalier à noyau, qu'on désigne dans les traités d'architecture par le nom de *vû Saint-Gilles*, est terminée par une surface *hélicoïde*, qui a pour génératrice un demi-cercle, et pour axe, une droite verticale située dans le plan de ce demi-cercle, laquelle droite est aussi l'axe du noyau de l'escalier.

On conçoit deux plans, l'un passant par l'axe d'une surface hélicoïde, et l'autre perpendiculaire à cet axe; considérant ces deux sections et l'hélice décrite par un point quelconque de la première section autour de l'axe, on aura trois choses, dont deux déterminent la troisième. De cette relation, j'ai déduit la théorie géométrique des *Damiers*, ou lames figurées de *Clouet*, que j'ai exposée dans le cahier des *Annales des Mines*, mars 1804, tome XV. J'avais antérieurement (en 1795) proposé cette question aux élèves de l'École polytechnique : « De ces trois choses d'une surface hélicoïde, la section par l'axe, la section perpendiculaire à l'axe, l'hélice décrite par un point quelconque de la surface autour de l'axe, deux étant données, trouver la troisième? » (Voyez le second cahier du journal in-4° de l'École polytechnique, page 103.)



NOTE III.

Article 49, livre II, page 163. — *Des épicycloïdes sphériques, et de leur usage dans la construction des engrenages.*

On déduit des propriétés de l'épicycloïde sphérique, la solution de cette question de mécanique :

« Étant donnés deux axes fixes, et deux points M, M' attachés invariablement à ces axes, on suppose qu'une force appliquée à l'un de ces points, à M par exemple, le fasse tourner autour du premier axe, on demande par quel mécanisme on doit joindre le point M au point M', pour que ce dernier tournant autour du second axe, les arcs de cercle parcourus dans le même temps par les deux points, soient dans un rapport donné et constant. »

(Voyez la solution de cette question dans mon *Traité des Machines*, 4^e édition, année 1828, page 361.)

NOTE IV.

Article 56, livre II, problème X, page 169. — *Intersection de trois cônes droits à axes parallèles.*

Le problème X, page 167, a au plus quatre solutions : pour le démontrer, nous rapporterons les trois surfaces coniques droites, lieux géométriques du point cherché ; à trois plans rectangulaires, et nous supposerons que leurs axes sont parallèles à l'axe des z ; nous placerons le sommet du premier cône à l'origine des coordonnées ; le sommet du second sur le plan de xz , au point déterminé par les coordonnées $x = a$, $z = h$; le sommet du troisième, au point qui a pour coordonnées $x = a'$, $y = b'$, $z = h'$.

Nommant l, m, m' les cotangentes des angles que les droites génératrices des cônes droits, font respectivement avec les axes de ces cônes, on aura pour les équations des trois surfaces :

$$s^2 = l^2 (x^2 + y^2) ; (s-h)^2 = \frac{m^2}{l^2} \{ (x-a)^2 + y^2 \} ; (s-h')^2 = \frac{m'^2}{l'^2} \{ (x-a')^2 + (y-b')^2 \} \dots (E).$$

Développant les deux dernières équations, on a :

$$(s-h)^2 = m^2 (x^2 + y^2) + m^2 (a^2 - 2ax) ; (s-h')^2 = m'^2 (x^2 + y^2) + m'^2 (a'^2 + b'^2 - 2a'm'x - 2b'm'y)$$

et mettant pour $x^2 + y^2$, la valeur égale $\frac{s^2}{l^2}$;

$$(s-h)^2 = \frac{m^2 s^2}{l^2} + m^2 (a^2 - 2ax) ; (s-h')^2 = \frac{m'^2 s^2}{l'^2} + m'^2 (a'^2 + b'^2 - 2a'm'x - 2b'm'y) ;$$

$$\text{d'où l'on tire : } x = \frac{a'l'm^2 + m^2 s^2 - l^2 (s-h)^2}{2al'm^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$y = \frac{al'm'm'^2 (a'^2 + b'^2 - a'a') + m'm'^2 s^2 (a' - a') + l'(a'm'^2 (s-h')^2 - am'^2 (s-h')^2)}{2abl'm'm'^2} \dots (2).$$

Substituant ces valeurs de x et y dans l'équation $s^2 = l^2 (x^2 + y^2)$,

l'équation finale sera évidemment du quatrième degré, et à chaque racine de cette équation correspondront les valeurs linéaires de x et y , données par les équations (1) et (2). Les quatre systèmes de valeurs correspondantes, qu'on trouve pour x , y , z , déterminent quatre points communs aux trois surfaces coniques des équations E, dont la position satisfait aux conditions du problème X.

NOTE V.

Articles 57 - 62, liv. II, page 170.

NOTICE HISTORIQUE SUR CE PROBLÈME: *Connaissant dans une pyramide triangulaire la base et les angles des arêtes opposés aux côtés de la base, construire le sommet de la pyramide?*

Les premières recherches sur la solution de ce problème se trouvent dans le deuxième volume des savans étrangers, Académie de Paris, année 1754; Estève, de la Société royale des sciences de Montpellier, l'avait mis en équations; il posait ainsi la question: *La base d'une pyramide triangulaire étant donnée, avec les angles au sommet, déterminer les dimensions de la pyramide?* Il avait pris pour inconnues, dans la pyramide triangulaire ABCD (pl. 30, fig. C) les trois angles ADC, ADB, ABC compris entre les deux arêtes AD, AB et les trois côtés CD, DB, BC de la base; les quantités connues de la pyramide sont ces trois côtés, et les trois angles opposés, qui ont pour sommet commun le sommet A de la pyramide.

Nommant b, c, d les côtés de la base BCD de la pyramide ABCD; B, C, D les angles opposés à ces côtés, qui ont pour sommet commun le point A sommet de la pyramide; x, y, z les angles inconnus ADC, ADB, ABC; x', y', z' les angles ACD, ABD, ACB, on aura :

$$\begin{aligned} \sin x' &= \sin(x+B); \sin y' = \sin(y+C); \sin z' = \sin(z+D); \text{ d'où l'on déduit :} \\ AD &= \frac{b \sin x'}{\sin B} = \frac{c \sin y'}{\sin C}; AB = \frac{c \sin y}{\sin C} = \frac{d \sin z}{\sin D}; AC = \frac{b \sin x}{\sin B} = \frac{d \sin z}{\sin D} \quad (1). \\ \frac{b \sin(x+B)}{\sin B} &= \frac{c \sin(y+C)}{\sin C} \quad (2). \quad \frac{c \sin y}{\sin C} = \frac{d \sin(z+D)}{\sin D} \quad (3). \end{aligned}$$

Les équations (1), (2), (3) renferment la solution du problème considéré dans sa généralité, et on en déduirait les valeurs de $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$, qui déterminent toutes les dimensions de la pyramide.

Estève n'a pas donné pour le cas général, l'équation finale qui ne contiendrait qu'une seule inconnue, par exemple $\sin x$; il n'a achevé la solution que pour le cas particulier où les deux angles x et z seraient égaux. Alors l'équation (1) donne $\frac{b}{d} = \frac{\sin B}{\sin D}$; c'est-à-dire, que les côtés b et d de la pyramide, sont proportionnels aux sinus des angles B et D, opposés à ces côtés.

Dans cette hypothèse, l'équation finale est du quatrième degré en $\sin x$, et se résout à la manière des équations du second degré.

En 1773, Lagrange a publié dans le volume de l'Académie de Berlin, pour cette année, un mémoire sur la pyramide triangulaire, où l'on trouve les trois équations suivantes :

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos B = b^2; y^2 + z^2 - 2yz \cos C = c^2; x^2 + z^2 - 2xz \cos D = d^2; x, y, z \text{ étant les trois arêtes de la pyramide; } b, c, d \text{ les trois côtés de la base; B, C, D les angles opposés à ces côtés.}$$

Éliminant y , z , l'équation finale en x serait du huitième degré, ainsi que M. Lacroix l'a remarqué dans son *Complément de géométrie*, première édition, année 1795, page 85.

En 1795, Lagrange est revenu sur cette question dans le *Cours de mathématiques élémentaires* qu'il fit aux écoles normales de cette année, conjointement avec Laplace, et il fit observer qu'en prenant pour inconnues l'une quelconque des arêtes de la pyramide, et les rapports de celle-ci aux deux autres, l'équation finale ne serait que du quatrième degré. Le calcul avait été indiqué par Lagrange; je l'ai développé dans la *Correspondance sur l'École polytechnique* (tome II, juillet 1812, page 334). Faisant $\frac{y}{x} = u$, $\frac{z}{x} = t$, $\cos B = \beta$, $\cos C = \gamma$, $\cos D = \delta$, les trois équations précédentes deviennent :

$$b^2 = x^2(1 + u^2 - 2\beta u); c^2 = x^2(u^2 + t^2 - 2\gamma ut); d^2 = x^2(1 + t^2 - 2\delta t);$$

de ces trois équations, on déduit les deux suivantes du second degré en u et t :

$$\left. \begin{aligned} b^2(t + t^2 - 2\delta t) &= d^2(1 + u^2 - 2\beta u) \\ c^2(1 + t^2 - 2\delta t) &= d^2(u^2 + t^2 - 2\gamma ut) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (E).$$

L'élimination de u ou de t entre ces deux équations, conduit à une équation du quatrième degré en u ou en t .

Les deux solutions algébriques de Lagrange ne déterminaient pas le nombre des pyramides qui satisfaisaient aux conditions du problème; il n'était pas prouvé que l'équation finale du huitième degré, à laquelle on arrive par la première solution, ne contenait pas des racines égales ou imaginaires, et cette équation s'abaissant du huitième degré au quatrième par la seconde solution, on pouvait croire que le problème n'était susceptible que de quatre solutions distinctes. J'ai fait voir dans l'article cité de la *Correspondance* (juillet 1812), 1° qu'on pouvait obtenir les huit racines de l'équation du huitième degré par l'intersection d'une courbe du quatrième degré et de deux cercles dont les centres et les rayons étaient donnés; 2° que cette courbe du quatrième degré se construisait par points; 3° qu'elle était coupée par deux cercles en huit points, qui étaient les sommets de huit pyramides de même base. Ayant abaissé de chacun des huit sommets des perpendiculaires sur le plan de la base commune, et les ayant prolongés autant au-dessous du plan qu'en-dessus, les extrémités de ces perpendiculaires sont les sommets de huit autres pyramides *symétriques* des premières, de même base et de même hauteur. J'avais démontré que les huit pyramides et leurs symétriques satisfaisaient aux conditions du problème, et qu'ainsi ce problème était susceptible de seize solutions.

Est-ce à remarquer que le problème dont il s'était occupé n'était pas de pure spéculation; qu'il pouvait être utile en géographie, ce qui en avait fait naître l'idée, et qu'on pourrait l'énoncer ainsi : « Étant placé sur le sommet d'une montagne, et connaissant la distance qu'il y a entre trois objets qu'on découvre dans la plaine, il s'agit de déterminer du même sommet, par les règles de la trigonométrie, la hauteur de la montagne et la distance à chacun des objets qui sont dans la plaine; enfin, tout ce qui appartenait à la pyramide, dont la base connue est dans la plaine, et le sommet à l'œil de l'observateur qui y mesure les angles formés. »

On sait que la géométrie descriptive et son application à la théorie du dessin ont pris naissance à l'École royale du Génie établie à Mézières en 1748, et que Monge a professé dans cette école pendant vingt ans de 1784 à 1804. On y proposait le problème d'Estève, comme une application de la géométrie descriptive à la topographie. Monge en a donné la solution dans ses leçons aux écoles normales de 1795, et a publié cette solution dans le journal de ces écoles, tom. III, p. 347-351. Si cette question était traitée par l'analyse (dit Monge, p. 349 du même journal), elle conduirait généralement à une équation du soixante-quatrième degré. Ce savant

supposait qu'on aurait pris pour inconnues, les trois coordonnées du sommet de la pyramide, et que ce sommet serait déterminé par l'intersection de trois surfaces annulaires; les équations de ces surfaces étant chacune du quatrième degré, on pouvait en conclure que généralement l'équation finale non réduite serait du soixante-quatrième degré. Monge n'avait pas effectué ou discuté ces calculs; il voulait seulement montrer dans une leçon orale de géométrie descriptive, que pour certains problèmes, les constructions géométriques étaient préférables aux calculs algébriques.

En 1825, M. Bruno de Naples a publié un mémoire écrit en italien, qui a pour titre : *Soluzione geometrica di un difficile problema di sito*; Napoli, 1825, in-6° de 20 pages et une planche. On trouve dans ce mémoire la solution de la question suivante : *Étant donné un point et deux droites dans l'espace, mener par le point un plan qui coupe les deux droites en deux autres points, tels que les trois points soient les sommets d'un triangle semblable à un triangle donné.* (Voyez page 170.)

M. Bruno a résolu ce problème synthétiquement par la méthode des anciens, et il a fait voir que la solution générale dépendait de l'intersection de deux hyperboles tracées sur le même plan. Le problème d'Estève n'est évidemment qu'un cas particulier de celui qui vient d'être énoncé; il suffit de supposer que les deux droites données se rencontrent; le point de rencontre étant pris pour le sommet d'une pyramide, on joint ce point et le point donné par une droite; cette droite et les deux droites données concourantes au même point, sont les arêtes d'une pyramide triangulaire qu'il s'agit de couper suivant un triangle de similitude donnée. M. Bruno a résolu cette question, et il a de plus examiné ce que devient la solution générale, lorsque deux côtés du triangle, base de la pyramide, sont proportionnels aux sinus des angles opposés à ces côtés et compris entre les arêtes de la pyramide. Estève avait vu que dans ce cas particulier, la solution du problème dépendait d'une équation du quatrième degré, qui se résout à la manière du second, et M. Bruno l'a ramené à l'intersection de la ligne droite et du cercle. J'ai traduit le mémoire de M. Bruno; la traduction et les additions qui m'ont paru nécessaires pour compléter le texte, ont été publiées dans les mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, année 1826. J'ai ajouté à cette traduction la solution analytique suivante du problème de M. Bruno.

On prend pour plan des xy le plan mené par le point donné A (fig. D, pl. 3e) parallèlement aux deux droites données, et pour axes des x et des y les parallèles à ces droites menées par le point A pris pour origine des coordonnées x et y . Les droites données sont projetées orthogonalement sur le plan des xy suivant BDM et BEN; on suppose que ces projections comprennent un angle donné MBN ou DBE; elles se coupent au point B qui est la projection de la plus courte distance des deux droites données sur le plan des xy . Soit AMN la projection du triangle dont l'un des sommets est en A, et les deux autres sommets en m et n sur les droites données, aux points de l'espace dont M et N sont les projections; on demande que ce triangle soit semblable à un triangle donné.

Nommons γ l'angle connu des axes AX, AY, a la droite AD, b la droite AE, f la distance du point m de l'espace au plan des xy , f' la distance du point n de l'espace au même plan, et l'on aura pour les droites AM, AN, MN, les valeurs suivantes en x et y , qui sont les coordonnées, l'une du point M parallèle à l'axe des x , l'autre du point N parallèle à l'axe des y :

$$\overline{AM}^2 = x^2 + a^2 + 2ax \cos \gamma; \overline{AN}^2 = y^2 + b^2 + 2by \cos \gamma;$$

$$\overline{MN}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{NB}^2 - 2 \text{ MB. NB. } \cos \gamma = (x-b)^2 + (y-a)^2 - 2 \cos \gamma (x-b)(y-a),$$

désignant par l, l', l'' les trois côtés du triangle Amn de l'espace, dont la projection sur le plan des xy , est AMN , les longueurs de ces côtés seront déterminées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} l &= \overline{AM} + f'; \quad l' = \overline{AN} + f''; \quad l'' = \overline{MN} + (f - f')^2, \\ \text{ou } l &= x^2 + 2ax \cos \gamma + a^2 + f'^2; \quad l' = y^2 + 2by \cos \gamma + b^2 + f''^2; \\ l'' &= (x-b)^2 + (y-a)^2 - 2 \cos \gamma (x-b)(y-a) + (f-f')^2. \end{aligned}$$

Puisque le triangle des côtés l, l', l'' est semblable à un triangle connu, les rapports de ces côtés $\frac{l}{f}, \frac{l'}{f'}$, sont donnés, et on aurait :

$$\frac{l'}{l} = k; \quad \frac{l''}{l'} = k'; \quad k \text{ et } k' \text{ étant des constantes connues.}$$

Substituant les valeurs de l, l', l'' , on aurait :

$$(x-b)^2 + (y-a)^2 - 2 \cos \gamma (x-b)(y-a) + (f-f')^2 = k^2 (x^2 + 2ax \cos \gamma + a^2 + f'^2). \quad (1)$$

$$(x-b)^2 + (y-a)^2 - 2 \cos \gamma (x-b)(y-a) + (f-f')^2 = k' (y^2 + 2by \cos \gamma + b^2 + f''^2). \quad (2)$$

De ces deux équations, on en déduit la suivante :

$$k (x^2 + 2ax \cos \gamma + a^2 + f'^2) = k' (y^2 + 2by \cos \gamma + b^2 + f''^2). \quad (3)$$

Cette dernière équation; combinée avec l'une des deux premières, donne les valeurs de x et y représentées sur la figure B (pl. 30), par les droites AP, A'Q.

Considérant deux quelconques des trois équations précédentes, comme appartenantes à deux courbes du second degré rapportées aux axes obliques AX, AY, les points d'intersection de ces courbes détermineroient (fig. D) les points M et N sur les projections des droites données, et par conséquent le triangle dont ces points sont les projections.

Nous remarquerons que dans les équations (1) et (2), le terme en xy a pour facteur $\cos \gamma$ qui peut prendre les deux valeurs $\pm \cos \gamma$; d'où il suit qu'il y a deux courbes du second degré qui correspondent à chacune des équations (1) et (2). Chacune de ces courbes rencontrant la ligne de l'équation (3) en quatre points, il s'ensuit que le problème proposé par M. Bruno est susceptible de huit solutions, c'est-à-dire, que l'on peut placer huit triangles semblables à un triangle donné, de manière qu'ils aient un point donné pour l'un des sommets communs, et les deux autres sommets sur les droites données.

L'équation (3) en x et y ne représente qu'une seule courbe du second degré, parce que le facteur $\pm \cos \gamma$ n'affecte que les termes linéaires de cette équation.

Dans le cas particulier où les deux droites données se rencontreraient, le point de rencontre serait le sommet de huit pyramides, qui auraient pour bases, des triangles semblables à un triangle donné.

NOTE VI.

Article 77, livre II, problème XIII, page 184. — *Solution analytique du problème d'une sphère qui en touche quatre autres; par M. POISSON.*

Soient A, B, C, D les centres des quatre sphères données; en les joignant par des droites, on formera une pyramide triangulaire dans laquelle tout sera connu. On suppose que le lecteur tracera la figure.) J'emploierai dans le calcul suivant les trois arêtes DA, DB, DC, les angles ADC, BDC, et l'angle compris entre les plans de ces deux angles; données qui suffisent pour déterminer la pyramide ABCD. J'appelle C l'angle des deux faces ADC, BDC; soit de plus :

$$DA=a, \quad DB=b, \quad DC=c; \quad \text{angle } ADC=\alpha, \quad \text{angle } BDC=\beta.$$

Pour fixer les idées, je suppose que le centre de la sphère demandée tombe dans l'intérieur de la pyramide ABCD, et que ce centre soit le point O. Joignons ce point aux sommets A, B, C, D, et soient :

$$DO=r; \quad \text{angle } ADO=x, \quad \text{angle } BDO=y, \quad \text{angle } CDO=z.$$

La distance du point O au point D étant appelée r , les distances du même point O aux points A, B, C seront égales à l'inconnue r , augmentée ou diminuée de quantités connues, qui dépendront des différences entre les rayons des sphères données; on pourra donc supposer

$$AO=r+g; \quad BO=r+h; \quad CO=r+k;$$

g, h, k désignant des quantités données dans chaque cas particulier. Enfin le plan des deux lignes OD et CD coupe l'angle dièdre C, en deux parties inconnues que je représenterai par p et q , p étant la partie comprise entre ce plan et la face ADC, et par conséquent q , l'angle compris entre ce même plan ODC et la face BDC. Nous aurons $C=p+q$, et d'après une formule facile à démontrer :

$$\sin^2 C = \cos^2 p + \cos^2 q - 2 \cos p \cdot \cos q \cdot \cos C. \quad (1).$$

Cela posé, le triangle COD donne :

$$(r+k)^2 = r^2 + c^2 - 2rc \cdot \cos z;$$

d'où l'on tire :

$$\cos z = \frac{c^2 - k^2 - 2kr}{2cr}. \quad (2).$$

On aura de même :

$$\cos y = \frac{b^2 - h^2 - 2hr}{2br}; \quad \cos x = \frac{a^2 - g^2 - 2gr}{2ar}.$$

Si l'on considère la pyramide triangulaire ADCO, et que l'on se propose de déterminer l'angle ODA au moyen de l'angle dièdre opposé, et des angles adjacents ADC; ODC, on aura, d'après les dénominations précédentes :

$$\cos x = \cos \alpha \cdot \cos z + \sin \alpha \cdot \sin z \cdot \cos p,$$

et par conséquent :

$$\cos p = \frac{\cos \alpha \cos z - \cos x}{\sin \alpha \sin z}.$$

ou bien en mettant pour $\cos z$ et $\cos x$, leurs valeurs, et multipliant par $r \sin z$,

$$r \sin z \cdot \cos q = \frac{c^2 - k^2 \cos \alpha}{2c \sin \alpha} - \frac{a^2 - g^2}{2a} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} + \left(\frac{g}{a} - \frac{k \cos \alpha}{c} \right) \cdot \frac{r}{\sin \alpha}.$$

On trouvera semblablement :

$$r \sin z \cos q = \frac{c^2 - h^2}{2c} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{b^2 - h^2}{2b} \frac{1}{\sin \beta} + \left(\frac{h}{b} + \frac{h \cos \beta}{c} \right) \frac{r}{\sin \beta}.$$

Je multiplie tous les termes de l'équation (1) par $r^2 \sin z$: je substitue ensuite dans son second membre pour $r \sin z \cos p$ et $r \sin z \cos q$ leurs valeurs, et en ordonnant par rapport à r , on aura évidemment une équation de cette forme :

$$r^2 \sin^2 z \sin^2 C = L + Mr + Nr^2,$$

dans laquelle L , M , N sont des quantités connues, dont je me dispenserais d'écrire les expressions. D'ailleurs l'équation (2) donne :

$$r^2 \sin z = \frac{c^2 - h^2}{4c^2} (4r^2 + 4hr + h^2 - c^2);$$

ce qui change la précédente en une équation de cette forme :

$$L' + Mr + Nr^2 = 0,$$

L' , M , N étant aussi des quantités connues.

Cette équation du second degré donnera la valeur de r ; les équations (2) et (3) feront connaître les angles z et p , et par conséquent le centre O , dont la position est déterminée par les trois quantités r , z , p . Quant au rayon de la sphère demandée, il est égal à la valeur de r , diminuée du rayon de la sphère, dont le centre est en D .

NOTE VII.

Article 95, livre II, page 199. — *Théorie géométrique des ombres, dans l'hypothèse d'un corps lumineux étendu aux trois dimensions, Application au défilement, par M. Say, officier du génie.*

Say, ancien professeur de fortifications à l'Ecole polytechnique, frère du savant M. Duméril, et de M. Say professeur d'économie politique, a terminé jeune encore sa carrière militaire sous les murs de Saint-Jean-d'Acre. Il avait publié en 1794, dans le grand journal de l'Ecole polytechnique (4^e cahier, pag. 588), un Mémoire sur le défilement. Nous en transcrivons les premières pages, qui contiennent l'énoncé d'une question, dont la solution paraît avoir donné naissance aux théories de la géométrie descriptive, et à l'enseignement de cette science dans l'ancienne Ecole du génie de Mézières.

Du défilement.

Un des principaux objets de tout ouvrage de fortification, est de garantir ceux qui le défendent, de l'effet des armes de ceux qui l'attaquent.

Si l'on considère les fortifications sous ce point de vue, le premier soin de l'ingénieur, le plus indispensable, doit être de garantir les défenseurs des ouvrages, de l'atteinte des balles et boulets tirés de plein fouet. C'est aussi l'objet de cette partie de l'art de la fortification, qu'on appelle le *défilement*.

La règle fondamentale du défilement est celle-ci : « Il faut disposer les ouvrages de manière que leurs parapets garantissent tout ce qu'il serait dangereux d'exposer aux coups directs de l'ennemi. »

On doit considérer dans le défilement, principalement trois choses :

1^o L'espace d'où peuvent partir les coups de l'ennemi dirigés contre l'ouvrage qu'on veut défiler. L'ennemi pouvant s'exhausser plus ou moins, cet espace s'étend à une certaine hauteur au-dessus du terrain qui environne l'ouvrage. Il s'étend aussi à une certaine distance horizontale de l'ouvrage, dont on détermine les limites;

2^o L'espace que l'on veut soustraire aux coups de l'ennemi on défile;

3^o La masse des parapets, qui, lorsqu'un ouvrage est bien défilé, doit intercepter tous les coups directs, toutes les lignes droites tirées de l'espace contre lequel on veut se couvrir, vers celui qu'on veut couvrir.

J'appellerai l'espace extérieur celui contre lequel on veut se couvrir, et l'espace intérieur celui que l'on veut couvrir.

On doit voir déjà un grand rapport entre la nature des données des problèmes de défilement, et celle des données des problèmes d'ombres. Les coups directs remplacent les rayons lumineux de ces derniers problèmes; l'espace extérieur remplace le corps lumineux; la masse des parapets remplace le corps opaque. L'ombre absolue de ce corps est l'étendue entière défilée par les parapets, et l'espace intérieur doit être renfermé dans cette étendue.

L'espace extérieur et le parapet étant donnés, on peut se proposer de déterminer géométriquement les limites de l'étendue défilée. On y parviendra par le même procédé qu'on emploierait pour déterminer l'ombre du parapet, si tous les points de l'espace extérieur étaient lumineux. Un plan qui se mouvrait en s'appuyant toujours sur le parapet et sur la surface qui termine l'espace extérieur, engendrerait par ses intersections successives, une nouvelle surface qui termine l'étendue défilée. J'appellerai la surface ainsi engendrée, *surface de défilement*.

La partie des parapets sur laquelle doit s'appuyer le plan générateur, n'est souvent qu'une seule ligne droite, la crête intérieure du parapet. On voit qu'alors la *surface de défilement* devient un plan passant par cette crête, et tangent à la surface qui termine l'espace extérieur.

Le plan de défilement n'est pas seulement tangent à la surface qui termine l'espace extérieur, mais il laisse toute cette surface au-dessous de lui, c'est-à-dire qu'il la touche en un ou plusieurs points, il ne la coupe nulle part; cette circonstance est essentielle, et elle est sous-entendue partout où l'on parle du plan de défilement.

NOTE VIII.

Article 110, livre II, page 208. — *Des tangentes conjuguées.*

Lorsqu'un cylindre est tangent à une surface courbe quelconque, la droite tangente en un point quelconque de la courbe de contact, et la droite du cylindre qui passe par le même point, sont des *tangentes conjuguées*. C'est ainsi que M. Charles Dupin les a nommées, à cause de cette propriété réciproque, que l'une émit prise pour la droite du cylindre tangent, l'autre est la tangente de la courbe de contact. Une autre propriété des tangentes conjuguées, non moins remarquable, est celle-ci : « En chaque point d'une surface courbe quelconque, tous les couples de tangentes conjuguées, sont des couples de diamètres conjugués d'une courbe du second degré unique; les

» axes de cette courbe sont dirigés suivant les tangentes des lignes de plus petite et plus grande courbure, au point de la surface que l'on considère. » (Voy. les articles de géométrie, par M. Dupin, que j'ai insérés dans la correspondance sur l'Ecole polytechnique, et l'ouvrage qu'il a publié en 1813, sous le titre de *Développemens de Géométrie*, un vol. in-4°.)

NOTE IX.

Articles 161 et 33, livre II, pages 244 et 152. — *Plan tangent à un ellipsoïde de révolution.*

Ces articles contiennent la solution de ce problème : « Mener par un droite donnée, un plan tangent à une surface de révolution. » Lorsque cette surface est du second degré (voy. art. 134, liv. I^{er}, p. 75), les points de contact sont déterminés par l'intersection de deux courbes planes, parce que les points de contact d'une surface du second degré et d'un cône tangent à cette surface, appartiennent à une courbe plane. En appliquant la solution générale, modifiée par cette propriété des surfaces du second degré, au cas particulier d'un ellipsoïde de révolution, on construit géométriquement le rayon de la réfraction extraordinaire, dans les cristaux doués de la double réfraction. Cette construction est l'objet d'un article que j'ai publié en 1810 sur le spath d'Islande, et sur la loi d'Huygens, que Malus avait à cette époque confirmée par de belles et nombreuses expériences. Elle se trouve aussi rapportée dans le *Traité de Physique* de M. Biot, tome III, page 336. On sait que dans tout cristal doué de la double réfraction, il y a un axe d'où émane la force qui produit la réfraction extraordinaire. C'est à l'auteur que nous venons de citer, qu'on doit la découverte de ce fait important, que la force est attractive ou répulsive, suivant l'espèce du cristal. On ne connaissait, avant cette observation, que les cristaux à axe réfringent.

NOTE X.

Article 187, livre II, page 269.

Solution d'un cas particulier de la perspective des surfaces courbes.

L'œil du spectateur étant considéré comme un point, le cône qui a ce point pour sommet, et qui est circonscrit à une surface donnée de forme et de position, touche cette surface suivant une ligne qu'on nomme *contour apparent*. Cette ligne, placée sur les surfaces du second degré, droite sur les surfaces développables, est en général une courbe à double courbure ; mais il peut arriver que l'un des rayons visuels, arête du cône circonscrit, soit une tangente du contour apparent. C'est ce cas particulier que j'avais remarqué depuis long-temps dans mon cours de géométrie descriptive à l'Ecole Polytechnique, et que j'ai résolu par la géométrie et par l'analyse.

Solution géométrique.

Les surfaces se divisent en deux grandes classes ; les unes pour lesquelles les deux rayons de courbure principaux sont du même côté par rapport au plan tangent ; les autres pour lesquelles ces rayons sont opposés, ou, suivant l'expression reçue, *de signes contraires*. Une surface individuelle peut aussi être composée de plusieurs zones, dont les courbures présenteraient les mêmes différences. La solution de la question proposée ne s'applique qu'aux surfaces ou portions de surfaces pour lesquelles les rayons de courbure principaux sont en chaque point de

signes contraires. Parmi ces surfaces, je distingue, comme la plus simple, l'hyperboloïde de révolution (voy. p. 62), dont on connaît trois modes de génération, savoir, deux par la ligne droite, et le troisième par une hyperbole qui tourne autour de son axe non transverse, et je détermine les valeurs des paramètres de cet hyperboloïde, pour qu'il devienne osculateur d'une surface en un point donné.

De l'hyperboloïde de révolution osculateur d'une surface.

Les sections normales d'un hyperboloïde de révolution, le cercle de gorge et l'hyperbole méridienne, se coupent en deux points, et pour ces points, les rayons de courbure principaux de la surface sont égaux aux rayons de courbure des deux sections. Notamment A l'angle que la droite génératrice de l'hyperboloïde fait avec le plan du cercle de gorge, R le rayon de ce cercle, R' le rayon de courbure opposé de l'hyperbole méridienne, on trouve que ces trois quantités sont liées entre elles par la relation suivante :

$$R' = R \tan^2 A.$$

Pour que l'hyperboloïde soit osculateur d'une surface en un point donné, et en supposant que ce point coïncide avec un point du cercle de gorge de l'hyperboloïde, il faut que les rayons R, R' soient égaux aux rayons de courbure principaux de la surface.

Admettons que ces deux conditions soient remplies, il s'ensuivra que les deux droites de l'hyperboloïde auront un contact du second ordre avec la surface proposée, et que tout plan mené par l'une ou par l'autre droite, contera la surface suivant une ligne qui aura une inflexion au point de rencontre des deux droites.

On sait que deux plans tangens consécutifs d'une surface réglée se couperont nécessairement suivant une droite, lorsque les points de contact infiniment voisins seront pris sur cette droite : l'hyperboloïde de révolution osculateur jouira de la même propriété, et en considérant les deux plans tangens consécutifs menés par les deux éléments de la droite, communs à l'hyperboloïde et à la surface proposée, ces plans seront aussi tangens à la surface, et se couperont suivant la droite de l'hyperboloïde.

Il suit de là qu'ayant mené par un point de l'espace deux plans tangens consécutifs à une surface, la droite intersection de ces plans, et la droite dont la direction est déterminée par les deux points de contact infiniment voisins, ne formeront qu'une seule et même droite, lorsque cette droite appartiendra à l'hyperboloïde osculateur qui passe par les deux points de contact.

C'est sur cette considération qu'est fondée la solution du problème suivant de perspective linéaire.

PROBLÈME. (Pl. 19. P.)

Trouver sur le contour apparent d'une surface, le point pour lequel la tangente à cette ligne passe par l'œil du spectateur? (1. 1. Pl. 19. P.)

Nous supposons que pour chaque point du contour apparent, on connaisse le plan de l'une des sections normales principales, et les deux rayons de courbure principaux, qui sont par hypothèse de signes contraires.

Soit *m*, fig. 1, un point quelconque du contour apparent, Rm S la normale à la surface en ce point, *nmp* la section normale principale, dont le cercle osculateur du rayon principal mO, est *lmv*; enfin mO' le second rayon principal de courbure pour le même point *m*, opposé au premier rayon mO.

On conçoit un hyperboloïde de révolution qui a pour cercle de gorge le cercle *lmv*, et pour droite génératrice le rayon visuel *mæ*, mené du point *m* à l'œil *æ* du spectateur.

En désignant les rayons de courbure principaux mO , mO' , par les lettres R et R' ; par R et R' , les rayons de courbure principaux de l'hyperboloïde au point m , et par A l'angle que le rayon visuel $m\alpha$ (fig. 1), fait avec le plan du cercle lmv , on aura

$$R' = R \tan^2 A.$$

L'hyperboloïde de révolution ayant au point m pour l'un des rayons de courbure principaux, la droite mO , laquelle est aussi le rayon de courbure principal de la surface, il est évident que cet hyperboloïde serait osculateur de la surface, si l'on avait $R' = R$, puisque les deux surfaces auraient au point m les mêmes rayons de courbure principaux R et R' ; d'où il suit qu'en portant la quantité connue R' ou $R \tan^2 A$ sur la normale RS , de O en μ vers le point m , ce point μ sera en dehors ou en dedans du cercle osculateur lmv , selon que R' sera plus petit ou plus grand que R . Prenant un autre point m' du contour apparent, on trouvera de la même manière sur la normale $R'S'$, un point μ' analogue au point μ ; la suite des points $\mu, \mu', \dots$ forme une courbe qui est un lieu géométrique du point demandé; l'intersection de cette courbe et du contour apparent, détermine le point de ce contour, pour lequel sa tangente passe par l'œil du spectateur. En appliquant cette solution au cas du tore, on remarquera que le rayon de courbure principal R est constant pour tous les points de cette surface.

On complètera par cette solution, la perspective du piédroche (art. 185-189, liv. II). Ayant le contour apparent $\alpha\beta\gamma$, (fig. 3, pl. 19. P.) de ce piédroche, on construira la courbe lieu géométrique du point demandé; cette courbe tracée (fig. 3), a plusieurs branches; on n'a conservé sur le dessin que celles qui rencontrent le contour apparent.

On voit dans la projection horizontale (fig. 2) quatre branches symétriquement placées par rapport à la droite $AF\alpha$. Les deux branches $A\epsilon$, $A\gamma$ coupent la projection du contour apparent aux points ϵ et γ ; leurs prolongemens au-delà de la droite GH (marqués d'un trait pointillé), ne sont d'aucune utilité. Il en est de même des deux branches $A\delta$, $A\eta$, qui déterminent les points δ , η , et qu'on n'a prolongées en deçà de GH , que pour montrer la forme de la courbe.

La projection verticale (fig. 3) fait voir les branches $\epsilon'\epsilon''$, $\gamma'\gamma''$ qui coupent la projection verticale $\alpha'\beta'\gamma'$ du contour apparent aux points ϵ' , γ' ; le premier ϵ' correspond aux deux points ϵ , γ , (fig. 2) de la projection horizontale du contour apparent, et le second γ' aux points δ , η de la même projection.

La génératrice méridienne de la scotie du piédroche est une ellipse dont on connaît pour chaque point un diamètre et son conjugué, et par conséquent le rayon de courbure, qui est aussi le rayon principal de courbure de la surface. La normale sur laquelle on compte ce rayon, étant prolongée jusqu'à l'axe de révolution, la partie de cette normale comprise entre l'ellipse méridienne et l'axe de révolution est le second rayon principal de courbure. Le rayon de courbure d'une ellipse en un point M (fig. 4), a pour expression $\frac{(ab)^2}{MP}$, ab étant le diamètre parallèle à la tangente $\alpha'b'$ au point M , et MP la perpendiculaire abaissée du point M sur ce diamètre.

Connaissant les rayons de courbure principaux de la scotie du piédroche en chaque point du contour apparent, la construction du lieu géométrique des points demandés, ne présentera aucune difficulté.

APPENDICE.

CHAPITRE I^{er}. — STÉRÉOTOMIE.

§ I. DÉFINITION ET PROCÉDÉS GÉNÉRAUX DE LA STÉRÉOTOMIE.

1. Un solide est défini, lorsqu'on donne la génération et la position respective des surfaces, qui, par leurs intersections, forment les arêtes ou les contours des faces de ce solide. Le dessin, ou le système de lignes qu'on obtient en projetant les arêtes d'un solide et les points remarquables des faces de ce solide, sur deux plans rectangulaires, se nomme le *trait* ou l'*épure* du solide. La construction de ce dessin est une application immédiate des principes qu'on a exposés dans la géométrie descriptive, et principalement de la méthode par laquelle on trouve l'intersection de deux surfaces, dont on connaît la génération, et la position par rapport aux deux plans de projection. Le choix de ces plans est encore plus important en stéréotomie qu'en géométrie descriptive pure (voyez page 123). Une épure de stéréotomie ayant pour objet de faire connaître les dimensions d'un solide, et ces dimensions se mesurant en général sur des droites qui joignent des points déterminés de ce solide, il faut, autant que possible, que les plans de projection soient parallèles aux droites sur lesquelles on mesure le plus grand nombre de dimensions.

2. On exécute les corps d'une forme déterminée par l'épure, au moyen de machines et outils qui varient suivant les qualités physiques des matières dont ces corps se composent. Cette opération, purement mécanique, est précédée de constructions géométriques, au moyen desquelles la matière passe sans tâtonnement, et par une méthode rigoureuse, de son état naturel, aux formes les plus composées, qui sont déterminées par le trait, ou l'épure. Cette méthode, par laquelle on trouve la figure des objets, d'après le dessin qui les représente, constitue un art particulier, qu'on nomme *stéréotomie*. Cet art, aussi ancien que l'architecture, est connu de ceux qui pratiquent la coupe des pierres et des bois, sous le nom d'*appareil* ou *art du trait*.

Des procédés généraux de la stéréotomie.

3. Quel que soit le solide qu'on propose d'exécuter, on doit le diviser en autant de parties qu'il est nécessaire, pour que le volume de chaque partie

soit moindre que celui du solide brut dont il doit être formé, et qu'on suppose donné. Ce mode de division varie pour chaque cas particulier; néanmoins on tâche toujours de satisfaire à ces trois conditions, 1° que les arêtes de chaque partie soient ou des lignes droites, ou des cercles, ou des courbes faciles à construire par points, exempts de changemens brusques dans leur courbure;

2° Que les joints de deux parties consécutives soient ou des plans ou des surfaces du genre de celles qu'on a définies (page 26); et qu'on a nommées *surfaces de révolution, surfaces développables, et surfaces réglées*;

3° Que les angles des surfaces, en un point quelconque des arêtes formées par les intersections de ces surfaces, diffèrent le moins possible de l'angle droit.

4. Les arts mécaniques offrent des moyens commodes pour exécuter les surfaces planes, développables, réglées, et les surfaces de révolution, ainsi que pour tracer des lignes droites ou des cercles. C'est pourquoi l'on obtient, en remplissant les deux premières conditions, économie de temps et de main-d'œuvre dans le travail qui a pour objet de donner à chaque solide la forme déterminée par l'épure.

La solidité des constructions est le motif principal de la troisième condition. Deux corps contigus étant terminés par des portions d'une même surface, et ayant pour joint commun une seconde surface qui coupe la première suivant une arête commune aux deux corps, chaque point de cette arête est le sommet de deux angles compris entre les plans tangens aux deux surfaces; si l'un de ces angles est obtus, l'autre sera nécessairement aigu.

Or il est très-important d'exclure, dans un système de corps, ceux dont les faces font entre elles de petits angles. En effet, quel que soit le moyen mécanique par lequel on exécute la partie d'un corps voisine du sommet de ces angles, on conçoit facilement que la moindre pression ou le plus léger choc de l'outil qu'on emploie, pourra briser cette partie, qui ne présente qu'une faible résistance. Supposant encore à celui qui dirige l'outil, assez d'adresse pour éviter les fractures, le solide mis sous la forme déterminée par l'épure, et à la place qu'il doit occuper dans un système de corps, éprouvera des pressions qui tendront à détacher les portions où il y a le moins de matière; il est donc nécessaire, pour la solidité des constructions, de n'employer que des corps dont les faces comprennent entre elles des angles peu différens de l'angle droit.

5. Un solide, quelles que soient ses dimensions, sera toujours divisible en un assez grand nombre de parties, pour que chacune soit formée d'une seule pièce. Ayant donné à chaque partie la figure et les dimensions déterminées

par l'épure, le système de toutes les parties qu'on aura exécutées isolément, et le solide proposé, seront renfermés dans le même espace, et terminés par des surfaces identiques. Il suffit donc de considérer en stéréotomie, des solides entiers, de dimensions moindres que celles de la matière première dont on doit les former.

Avant d'exposer les principes généraux de cet art, il est nécessaire d'examiner le cas particulier où le corps proposé qu'il s'agit d'exécuter est un solide à faces planes, ou un *polyèdre*.

Du polyèdre, ou solide à faces planes.

6. Le polyèdre étant défini, on peut supposer que chacune de ses arêtes est déterminée par ses projections sur deux plans rectangulaires, auxquels le solide est rapporté. Les arêtes contenues dans un même plan forment le contour d'un polygone, qui comprend une face du solide. Ayant divisé chaque polygone en triangles, les longueurs des côtés de ces triangles sont déterminées. Construisant à part les triangles, et les réunissant dans le même ordre où ils sont placés sur le polygone, on aura évidemment le développement d'une face du polyèdre proposé.

Ayant développé de la même manière toutes les faces du polyèdre, on construira les angles des plans qui ont pour intersections communes, les arêtes du solide; alors l'épure ou le trait sera complet, et voici l'usage qu'on en fera.

Après avoir soumis la matière première, pierre ou bois, dont on doit former le solide, à une action mécanique qui *dresse* l'une de ses faces, c'est-à-dire, qui l'aplanit dans un sens, on trace sur cette face plane, l'un des polygones formés par les arêtes du solide défini. Le plan de ce polygone fait avec les plans qui passent par ses côtés, des angles dièdres qui, par hypothèse, sont connus. On dressera encore la matière brute dans le sens de ces nouveaux plans, et on rapportera dans chacun d'eux le polygone qu'il contient.

En procédant de cette manière, on exécutera successivement toutes les faces du solide proposé, sous les angles que les plans de ces faces font entre eux; il est évident que le solide ainsi construit aura la forme déterminée par le trait ou l'épure.

§ II. DE LA STÉRÉOTOMIE APPLIQUÉE A UN SOLIDE QUELCONQUE DÉFINI.

7. Un solide terminé par des surfaces courbes, a pour arêtes les courbes à double courbure qui résultent de la pénétration de ces surfaces. Chaque arête étant l'intersection de deux faces, il peut arriver deux cas, ou que les angles

de ces faces, qui ont pour sommets les points de l'arête, soient saillans ou rentrans. Nous considérerons d'abord le solide à angles saillans, sur lequel il n'y a aucun angle rentrant, et nous le supposerons enveloppé de plans, disposés de manière que le volume du polyèdre compris entre ces plans, diffère le moins possible du volume du solide proposé.

On exécutera d'abord le polyèdre enveloppe d'après ce qui a été dit précédemment (art. 6), et la question de stéréotomie qu'il s'agit de résoudre, consistera à donner au polyèdre la forme du solide proposé. Pour résoudre cette question, on conçoit que les surfaces courbes qui contiennent les faces du solide, et dont la génération est connue (art. 47, liv. I^{re}), soient prolongées jusqu'aux faces planes du polyèdre. Le solide et le polyèdre étant rapportés aux mêmes plans de projection, les projections des lignes d'intersections des faces du solide prolongées et des faces planes du polyèdre, seront déterminées sur l'épure; et après avoir construit le développement de chacune de ces lignes, on pourra le rapporter sur la face du polyèdre qui la contient. Prenant ces lignes tracées sur le polyèdre, pour les directrices des génératrices mobiles des faces du solide proposé, la construction de ce solide ne dépendra plus que d'une opération mécanique, qui consistera à enlever de la matière du polyèdre tout ce qui sera en dehors de l'espace que les diverses génératrices parcourent, pour engendrer les faces du solide proposé.

Deux lignes suffisent pour diriger le mouvement d'une droite; mais lorsque la génératrice est un cercle, une ellipse, et en général, une courbe plane, il faut tracer sur l'une des faces du polyèdre, les intersections successives du plan mobile de la génératrice courbe. Connaissant deux points de cette génératrice sur les lignes directrices, et une droite du plan qui la contient, chacune de ses positions est déterminée.

8. Ce mode d'exécution ne convient évidemment qu'aux solides dans lesquels il n'y a pas d'angles rentrans; car, en supposant que deux faces contiguës comprennent entre elles des angles de cette espèce, leurs prolongemens enlèveront du polyèdre une partie du volume de ce solide qu'il faut lui conserver pour l'assimiler au solide proposé.

Dans le cas où il y a une arête rentrante sur le solide proposé, on dispose le polyèdre, enveloppe de ce solide, de manière que l'une de ses faces planes, la plus voisine de l'arête rentrante, puisse contenir la projection orthogonale de l'arête entière.

Au moyen de cette projection, et des distances de chaque point de l'arête à sa projection, on trace dans l'intérieur du polyèdre, l'arête même, que l'on considère comme une directrice, et dont on se sert pour engendrer les deux surfaces qui se coupent suivant cette arête.

La même opération se répète pour toutes les arêtes rentrantes du solide proposé.

9. L'une des faces courbes du solide étant exécutée, on trouve sur cette face les arêtes qui la terminent; ce qui peut se faire de la manière suivante :

Ayant marqué deux points P et P' sur les directrices dont on s'est servi, pour engendrer la surface qui contient la face du solide, on connaîtra ces points sur l'épure, et leurs distances à un point quelconque, donné par ses deux projections. Décrivant des points P et P' comme centres, avec des rayons égaux aux distances de ces points à celui qu'on veut rapporter, des courbes sphériques, ces courbes se rencontrent sur cette face au point demandé. Répétant cette opération pour les sommets des angles du polygone formé par les arêtes contenues dans la face, ainsi que pour d'autres points intermédiaires, on tracera les arêtes elles-mêmes.

Cette opération s'applique à toute espèce de surfaces; mais elle se simplifie, lorsque la face du solide appartient à une surface réglée. En effet, un point quelconque de cette face se trouve sur une droite qui coupe l'une des directrices de la surface réglée, en un autre point connu. La distance de ces deux points est donnée par l'épure; d'où il suit qu'on peut la rapporter avec le compas, après avoir exécuté la surface, sur la droite de cette surface qui contient les deux points.

10. Lorsque la face appartient à une surface développable, on déduit de l'épure (page 56, art. 96) la transformée de cette face sur le plan de développement. Cette transformée se compose des transformées des courbes, ou des arêtes qui forment le contour de la face.

Ayant tracé le contour de la transformée de la face développable, sur un plan flexible, tel que du carton, on applique ce carton sur la surface développable qu'on a déjà exécutée, en ayant soin que deux points de cette surface coïncident avec les mêmes points rapportés sur le plan flexible.

En coupe des pierres, on nomme la transformée d'une face développable, *panneau*.

11. Lorsque la matière première dont on forme un solide est, comme la plupart des pierres, d'un prix peu élevé, on ne s'assujétit pas à la condition de prendre pour polyèdre enveloppe, celui dont le volume diffère le moins possible du volume du solide. Souvent on donne à ce polyèdre la forme d'un parallépipède rectangle; alors le volume de matière contenue entre les faces du parallépipède et celles du solide proposé, est augmenté. Quoiqu'on perde cet excédant de matière, on est le plus souvent dédommagé de cette perte par l'économie du temps et de la main-d'œuvre.

12. Il y a des cas où le solide à exécuter est composé de faces courbes et de

faces planes. Alors, quel que soit le polyèdre enveloppé, il sera convenable, pour économiser la matière, que le plan de chaque face du solide, contienne aussi une face de ce polyèdre. Cependant il y a encore, dans cette hypothèse, des circonstances où l'on préfère le parallépipède enveloppé, qui n'a aucune face dans le plan de l'une des faces du solide enveloppé. Dans ce cas, le mode d'exécution de ces faces ne diffère pas de celui qu'on a exposé (art. 7, *Append.*), et qui s'applique également aux surfaces courbes et aux surfaces planes d'un solide.

13. En ne considérant dans le parallépipède rectangle enveloppé que ses faces extérieures, on l'applique à un autre usage dans l'art du sculpteur; il sert à copier une statue avec une exactitude rigoureuse. Le procédé est simple; il a pour objet d'obtenir dans l'intérieur d'un bloc de pierre, les points marqués en tel nombre qu'on veut, sur la surface de la statue originale.

Ayant mis en présence la statue et le bloc capable de la contenir, on les entoure de deux châssis égaux, composés de tringles et traverses, les unes horizontales, et les autres verticales. Les sections horizontales de ces châssis sont des rectangles égaux, et chacun d'eux est compris entre quatre plans verticaux passant par les côtés de ces rectangles. Les tringles et traverses portent des échelles linéaires, et par les points de division de ces échelles, on fait passer des fils qui se coupent à angles droits, et forment un réseau composé de petits carrés.

De chaque point marqué à la surface de la statue, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des plans extérieurs du châssis qui l'enveloppe; le pied de cette perpendiculaire correspond à un point déterminé de l'un des réseaux du même châssis. Le second châssis qui enveloppe le bloc étant par hypothèse égal au premier, on y marque le pied de la perpendiculaire sur le réseau égal et parallèle à celui du châssis de la statue. L'ouvrier enfonce une mèche au moyen d'un vilebrequin, de manière qu'elle passe par le point connu du réseau, et qu'elle s'arrête dans le bloc, à une distance de ce réseau, égale à la longueur connue de la perpendiculaire abaissée du point de la statue sur le plan du châssis qui l'enveloppe.

En répétant cette opération, on obtient dans l'intérieur du bloc autant de points qu'on veut, et la position respective de ces points est évidemment la même que celle des points de la statue qu'on a projetés sur les plans du châssis enveloppé de cette statue.

Conclusions.

14. Les procédés de la stéréotomie, pour donner aux matières premières les formes déterminées par une épure, consistent d'abord à trouver un polyèdre à faces planes, capable du solide proposé. Lorsque ce polyèdre est un parallélépipède, le mode d'appareil se nomme *méthode par équarrissement*; s'il diffère du parallélépipède, on dit que l'appareil se fait par la méthode des *beaux*, ou angles dièdres. (Ces deux mots *angle dièdre* et *beau* sont synonymes.)

L'instrument dont le tailleur de pierres fait usage pour mesurer les angles dièdres, se nomme *fausse équerre*. Il est composé de deux branches en bois, mobiles sur un centre, comme les deux branches d'un compas. On place, au moyen d'un rapporteur, les deux branches, sous un angle donné, et on les fixe, en tournant l'écrou d'une vis placée au centre de rotation. Un premier plan étant exécuté, l'un des côtés de la fausse équerre s'y applique exactement, et se tient perpendiculairement à l'arête de l'angle dièdre. Dans ce mouvement, la seconde branche de l'équerre doit glisser sur le second plan, et alors on est assuré que l'angle des deux plans est égal à celui des branches de la fausse équerre.

La transformation d'un polyèdre à faces planes, en un solide à faces courbes, se fait ou par les *panneaux*, lorsque les faces sont développables, ou par le *piqué*, qui consiste à rapporter par points, sur une surface donnée, une courbe de cette surface dont on a les deux projections. L'art de l'appareilleur consiste à choisir, dans chaque cas particulier, le mode d'appareil le plus convenable, qui satisfait le mieux aux conditions de stabilité, à l'économie de la matière et de la main-d'œuvre.

Aux quatre modes d'appareil qui conviennent à toutes les surfaces, il faut ajouter celui qui s'applique aux solides de révolution, et qu'on exécute mécaniquement, au moyen du *tour*. C'est ainsi que se font les colonnes, les balustres en pierre, qui découpent les balcons de maisons, les trottoirs de ponts, etc. Un patron découpé suivant la génératrice méridienne du solide est la seule figure nécessaire pour diriger l'outil du tourneur.

§ III. APPLICATION DE LA STÉRÉOTOMIE A LA COUPE DES PIERRES.

15. Les voûtes se composent de diverses parties qu'on nomme *voussoirs*; la décomposition d'une voûte en voussoirs, et l'art de donner à chaque vous-

soir la forme déterminée par l'épure ou le trait, sont l'objet spécial de la coupe des pierres.

Le nombre de voussoirs d'une voûte est toujours impair, et le voussoir du rang marqué par la moitié de ce nombre augmenté de l'unité, se nomme *la clef*. La surface d'une voûte se compose des faces visibles et contiguës des voussoirs, qu'on nomme *douelles*. Les lignes qui forment le contour de la douelle d'un voussoir, se nomment en général *arêtes de douelle*.

Les voûtes varient de forme et de grandeur, selon le monument auquel elles appartiennent, et suivant la destination qu'elles y remplissent. L'architecte ou l'ingénieur chargé de la construction d'un édifice, détermine la forme et la position de toutes les masses de cet édifice, en se conformant, autant que possible, aux règles générales du goût. L'appareilleur considère chaque masse isolément, et la divise en pierres ou voussoirs, en ayant égard à la grandeur, à la ténacité des matériaux, et aux conditions de stabilité.

L'ordonnance des voûtes doit être simple et régulière, comme celle des monuments, dont elles font partie; mais il y a des cas, et l'architecture militaire en offre beaucoup d'exemples, où l'on est obligé de construire des voûtes très-irrégulières, qui satisfont à des conditions essentielles, mais qui ne peuvent jamais servir de décoration extérieure.

16. Quelle que soit la destination d'une voûte, on la termine ordinairement par l'une des trois surfaces que nous avons nommées (page 26) *surfaces réglées, surfaces développables, surfaces de révolution*. Il y a deux manières de construire les voûtes et berceaux, qui consistent à employer des pierres de taille, ou des moellons, briques, etc., qu'on réunit par un ciment.

Lorsqu'on emploie la seconde manière, on exécute la voûte par parties, en soutenant chacune d'elles au moyen d'un système de charpente, dont la surface extérieure est de même forme que la surface intérieure de la portion de voûte à construire. Aussitôt que les cimens ont pris consistance, on enlève la charpente, et on l'établit au-dessous de la portion suivante, et ainsi de suite, jusqu'à ce que toute la voûte soit construite. On peut d'ailleurs se servir d'un système de charpente qui soutienne la voûte entière.

17. Lorsque des voûtes se rencontrent et se pénètrent, l'appareil de ces voûtes se fait de manière que certains voussoirs appartiennent à plusieurs voûtes, et sont terminés par plusieurs surfaces.

Les procédés des appareilleurs se modifient, dans chaque cas particulier, selon la forme et la grandeur des voûtes. Les auteurs qui ont écrit sur la coupe des pierres, ont distingué cinq espèces de voûtes, qu'ils ont nommées *portes, voûtes, descentes, trompes, escaliers*.

Nous ferons connaître, par des exemples, chaque espèce de voûtes.

Les voûtes, quelles que soient leurs formes, sont contenues par des murs qu'on nomme *pieds-droits*.

18. De tous les *pieds-droits*, le plus simple est un mur droit, compris entre deux plans verticaux parallèles, dont la distance mesure l'épaisseur. Des plans horizontaux et d'autres plans verticaux, parallèles entre eux et perpendiculaires aux faces du mur, le divisent en parallépipèdes rectangles. On nomme *assise* la partie du mur comprise entre deux plans horizontaux consécutifs, et les joints verticaux d'une assise ne sont pas les joints de l'assise qui la suit ou la précède; on les alterne, afin de recouvrir les joints d'une rangée de pierres, par les faces des pierres de la rangée suivante. Quelle que soit la forme d'un mur, le recouvrement des joints est nécessaire, tant pour conserver les cimens que pour donner au système de pierres qui composent le mur, la solidité qu'il aurait, s'il était formé d'une seule pierre.

19. La plupart des pierres qu'on emploie dans les constructions proviennent de carrières, où elles sont rangées par couches parallèles. Comme c'est dans le sens perpendiculaire aux couchés que la pierre est capable de la plus grande résistance, il est très-important que dans un mur droit, comme celui dont on vient de parler, le sens de ces couches, qu'on nomme le *lit de la pierre*, soit horizontal; et lorsqu'une pierre d'une forme déterminée doit entrer dans une voûte, il faut, par la même raison, que le lit de cette pierre soit dans une direction perpendiculaire à la résultante des pressions qu'elle doit supporter.

Si la substance de la pierre est homogène, le sens dans lequel on doit la placer, pour en former un *vousoir* ou le polyèdre enveloppe de ce *vousoir*, n'est déterminé que par la comparaison des volumes du polyèdre enveloppe et de la pierre brute, lesquels doivent différer le moins possible entre eux, pour économiser la matière.

Lorsque les pierres ont été extraites d'une carrière, où elles sont rangées par couches horizontales ou inclinées, on nomme la face d'une pierre, parallèle à la surface qui sépare deux couches consécutives, le *lit de la pierre*. L'appareilleur fait d'abord *dresser* ce lit, de manière que cette face, sensible-ment courbe, devienne un plan exact.

Le procédé que suit le tailleur de pierres pour exécuter une surface plane, mérite d'être connu. Son outil principal est un marteau à deux tranchans inégaux en largeur. A l'aide du petit tranchant, il forme sur les deux bords contigus de la pierre, deux bandes planes de la largeur au plus de ce tranchant, sur lesquelles il trace deux lignes droites qui se rencontrent sur la ligne d'intersection des deux bandes. Regardant ces droites comme des directrices fixes, il fait glisser l'arête d'une règle en bois sur ces directrices,

et il ôte de la pierre tout ce qui empêche la règle de s'appliquer exactement dans tous les sens sur les droites qui dirigent cette règle dans son mouvement.

20. Quel que soit le vousoir d'une voûte qu'il s'agit d'exécuter, on peut toujours prendre pour son *polyèdre enveloppe*, un solide dont une face soit parallèle au plan du lit de la pierre, dont la position, par rapport au vousoir est déterminée. Cette première face étant donnée, on y trace le polygone formé par les plans des faces qui lui sont adjacentes, et on achève le polyèdre enveloppe par la méthode qu'on a exposée (art. 6, *Append.*).

CHAPITRE II — COUPE DES PIERRES.

§ I. DES PORTES. (Pl. n° 1-2-3-4.)

21. Les portes sont de petites voûtes pratiquées dans l'épaisseur d'un mur, et destinées à convier un passage, ou à éclairer l'intérieur d'une voûte. Les voûtes et les portes qui se pénètrent, ou se *rachètent*, ont leurs naissances dans le même plan horizontal.

Porte droite.

22. La porte la plus simple, qu'on nomme *porte droite en plein cintre*, est pratiquée dans l'épaisseur d'un mur droit, compris entre deux plans verticaux parallèles. La surface de cette porte est un demi-cylindre à base circulaire, tangent aux plans des pieds-droits, qui sont verticaux et perpendiculaires aux faces parallèles du mur.

Ayant divisé le demi-cercle en un nombre impair de parties égales, on mène par les points de division, des droites, qui sont (art. 15, *Append.*) des *arêtes de douelles*. Les plans menés par les arêtes de douelles et par l'axe du cylindre droit, sont perpendiculaires à la surface de ce cylindre, et se nomment *plans de joints*. Donnant la même largeur à tous les joints, chacun de ces joints est un parallélogramme rectangle, dont deux côtés sont égaux aux arêtes de douelles, et la distance de ces côtés parallèles est égale à la largeur du joint.

Les vousoirs de la porte doivent se lier aux pierres du mur droit; mais chaque pierre de ce mur est un parallélépipède à faces horizontales et verticales; c'est pourquoi le vousoir de la porte est un prisme qui a pour *section droite*, un polygone de cinq côtés, formé d'un arc de cercle, de deux portions égales

des rayons de ce cercle menés par les extrémités de l'arc, et de deux droites, l'une horizontale, l'autre verticale. La longueur du voussoir est égale à l'épaisseur du mur. Ce polygone est marqué des lettres *a, b, c, d, e*, sur la planche de l'appendice qui a pour titre : *Coupe des pierres, porte n° 1, profil.*

Lorsque l'épaisseur du mur est trop grande, et les dimensions des matériaux trop petites, pour que les voussoirs soient d'un seul morceau dans le sens de leur longueur, on les subdivise par des plans verticaux perpendiculaires aux arêtes de douelles, ayant soin que les joints verticaux de deux voussoirs consécutifs ne soient pas dans le même plan.

Les portes Saint-Martin et Saint-Denis (à Paris), et en général les monumens désignés sous le nom d'*arcs de triomphe*, sont des portes droites.

PORTE N° 1.

Porte biaisée, en talus, rattachant un berceau cylindrique.

Définition.

23. Le berceau cylindrique est exécuté en moellons (art. 6, *Appendice*) ; il est rattaché par une porte cylindrique. Les droites génératrices des surfaces du berceau et de la porte, sont horizontales, et leurs projections sur un plan horizontal se coupent à angle droit.

L'ordonnance de la petite voûte ou de la porte n° 1, est la même que pour la porte droite. *abcde* est la section droite de l'un des voussoirs. Voici la différence des deux portes. La porte droite est pratiquée dans l'épaisseur d'un mur droit : la porte n° 1 est terminée d'un bout par la surface cylindrique du berceau, de l'autre à la face plane d'un mur dit *biaisé* et *en talus*. On nomme mur *en talus* celui qui est terminé par deux plans, l'un vertical, et l'autre incliné à l'horizon ; et lorsque les lignes droites, intersections de ces plans par un plan horizontal, ne sont pas parallèles, le mur est *biaisé* et *en talus*. La face verticale du mur qui sert de pied-droit au berceau cylindrique, est tangente à ce berceau ; l'autre face est *biaisée* et *en talus* : c'est pourquoi la porte n° 1, pratiquée dans l'épaisseur de ce mur, se nomme porte *biaisée, en talus, rattachant un berceau cylindrique*.

Construction de l'épure.

24. Ayant pris pour plan horizontal de projection, le plan des naissances de la porte, et du berceau rattaché par cette porte, on y projette les lignes suivant lesquelles la surface cylindrique de la porte, et les faces de chaque voussoir de cette porte, sont coupées, 1° par la surface cylindrique du ber-

ceau; 2° par la face du mur, braise et en talus. Chaque voussoir étant donné sur le profil, par une section droite telle que *ambcde*, la construction de la ligne d'intersection des deux cylindres se fait de la manière indiquée (art. 210, liv. 1^{er}).

On déduira du plan et du profil, le développement, 1° de la surface cylindrique de la porte, qui contient tous les panneaux de douelles de cette porte; 2° des joints correspondans à chaque douelle.

Les panneaux de douelles et de joints sont construits (*Append.*, pl. 1) pour quatre espèces de portes cylindriques, qui ont même profil, et qu'on nomme :

- 1° Porte droite;
- 2° Porte droite, rachetant un berceau cylindrique;
- 3° Porte braise, rachetant un berceau;
- 4° Porte braise et en talus, rachetant un berceau.

On a fait tourner chaque plan de joint, autour de l'arête de douelle contenue dans ce plan. Quoique les panneaux de douelles et de joints soient réunis sur le même plan de développement, on distingue néanmoins sur la figure, chaque douelle et les deux joints de voussoir adjacens à cette douelle. C'est pourquoi cet arrangement de la figure des panneaux, a été adopté pour toutes les épurés de voûtes à surfaces cylindriques ou développables.

Application du trait sur la pierre.

25. Prenons pour exemple le voussoir de la porte braise, en talus, rachetant un berceau, dont la section droite est le polygone de cinq côtés *ambcde*. Le plan *ABCD* et le profil *afgh* font connaître les dimensions d'un parallépipède rectangle, capable de contenir ce voussoir. La longueur *AB* ou *CD* de ce solide est au moins égale à la droite *Cc'* de la projection horizontale *a'b'c'd'e'c* du voussoir.

Ayant exécuté le parallépipède (*ABCD, fgdh*), on rapportera sur ses deux faces verticales et parallèles *AD, BC*, le panneau de tête *ambcde*; ce qui donnera le moyen de le transformer en un prisme de la longueur *AB* ou *DC*, et de la base ou section droite (*ambcde*).

Appliquant les panneaux de douelle et de joints sur les faces correspondantes du nouveau solide, on aura les contours du voussoir entier de la porte n° 1. Ces contours servent de directrices aux génératrices des surfaces qui terminent le voussoir.

Le plan et le profil donnent un autre prisme qui diffère moins du voussoir de la porte, que le parallépipède rectangle. Ce prisme a pour section droite le polygone rectiligne *abcde*, et pour longueur la droite *AB* ou *CD*. Ce prisme

étant exécuté, il est facile de voir comment on lui donnera, au moyen des panneaux de douelle et de joints de chaque voussoir, la forme de ce voussoir. Le solide qu'on obtiendra sera terminé, 1° par quatre plans perpendiculaires au plan du *profil*, et désignés sur ce profil par les droites *ac*, *bc*, *cd*, *de*; 2° par un cinquième plan, *biais* et *en talus*, qui contient la face dont la projection horizontale est *a'm'b'c'd'*; 3° par les deux surfaces cylindriques de la porte et du berceau racheté: d'où il suit que la surface entière du voussoir se compose de cinq faces planes et de deux faces courbes; que le nombre des arêtes de ce voussoir est de quinze, dont dix sont des lignes droites, quatre des courbes planes, et la quinzième est la courbe à double courbure, intersection des deux faces courbes cylindriques.

PORTE N° 2. (*Appendice*, pl. 2.)

Porte en tour ronde, braise, en talus, rachetant un berceau sphérique.

Définition.

26. On nomme eu coupe de pierres, 1° *mur en tour ronde*, celui qui est terminé par deux cylindres droits concentriques, à bases circulaires; 2° *mur en tour ronde, en talus*, celui qui est compris entre un cylindre droit et un cône droit, dont les sections horizontales sont des cercles concentriques; 3° *porte en tour ronde, en talus*, une porte de même profil que la précédente N° 1 (*App.*, pl. 1), pratiquée dans l'épaisseur d'un *mur en tour ronde, en talus*, et située, par rapport à ce mur, de manière que l'axe de la surface cylindrique, qui est horizontal, passe par l'axe vertical, commun au cylindre droit et au cône droit qui terminent le mur. Lorsque ces deux axes ne se rencontrent pas, la porte est dite *en tour ronde, en talus et braise*.

On suppose que l'espace renfermé dans le cylindre droit du *mur en tour ronde, en talus*, est couvert par un berceau sphérique construit en moellons, dont la naissance est dans un plan horizontal donné. Ce plan coupe le cylindre droit suivant un cercle, que l'on prend pour le grand cercle de la sphère qui termine le berceau. La porte N° 2 (*App.*, pl. 2) ayant sa naissance dans le même plan, elle rencontre ou rachète le berceau sphérique; c'est pourquoi on la nomme *porte en tour ronde, braise, en talus, rachetant un berceau sphérique*.

Construction de l'épure. (Appendice, pl. 2.)

27. L'épure se compose, comme pour la porte N° 1, de trois parties, le *profil*, le *plan*, et le développement des panneaux.

Le plan du *profil* est perpendiculaire à l'axe du cylindre de la porte ; on prend pour le *plan* de projections horizontales, celui des naissances de la porte et du berceau racheté. Les lignes à projeter sur ce dernier plan sont les intersections de la surface cylindrique de la porte et des faces de chaque voussoir de cette porte, 1° par la surface sphérique du berceau ; 2° par la face conique du mur en *tour ronde*, en *talus*. Chaque voussoir est déterminé sur le profil par sa *section droite* (*abcde*). La construction des lignes d'intersections, ou des arêtes du voussoir, se fait de la manière indiquée (art. 210, liv. 1^{er}).

On déduira du plan et du profil, le développement, 1° de la surface cylindrique de la porte, qui contient tous les panneaux de douelles de cette porte ; 2° des joints correspondans à chaque douelle.

Les panneaux de douelles et de joints sont construits pour quatre cas différens, et donnent le moyen d'appareiller les voussoirs des portes suivantes :

- 1° Porte en tour ronde, biaise ;
- 2° Porte en tour ronde, biaise, en talus ;
- 3° Porte en tour ronde, biaise, rachetant un berceau sphérique ;
- 4° Porte en tour ronde, biaise, en talus, rachetant un berceau sphérique.

Les droites qui appartiennent aux contours de ces panneaux, ou qui servent à construire les lignes courbes de ces contours, sont horizontales ; c'est pour avoir directement leurs longueurs, qu'on a pris le plan horizontal des naissances des portes N° 1 et 2, pour l'un des plans de projection.

Application du trait sur la pierre.

28. Cette application se fait comme pour la porte précédente. On exécute d'abord un parallépipède rectangle ou un prisme droit dont la base est un polygone rectiligne de cinq côtés *abcde* (*App.*, pl. 2) ; on change ce prisme en un autre qui ne diffère du premier que par une face cylindrique marquée au profil *amb*, qui remplace le plan *ab*. En appliquant sur ce prisme les panneaux de douelle et de joints relatifs à chaque voussoir, on donne à ce voussoir la figure déterminée par l'épure.

De la figure d'un voussoir de la porte N° 2.

29. Le voussoir ayant pour profil le polygone *ambede* (*App.*, pl. 2), étant de plus compris entre la surface intérieure du berceau sphérique, et la surface extérieure du mur en tour ronde, en talus, sa forme serait entièrement déterminée. Mais il y a une modification de cette forme, qui résulte de ce que la face verticale marquée au profil *ed*, au plan *e'd'*, n'est pas prolongée jusqu'au berceau sphérique, qu'elle couperait trop obliquement. Par le point (*e*, *d'*), intersection de l'horizontale (*e'd'*, *e*) de cette face et du berceau sphérique, on mène un plan vertical marqué au plan *d'k'*, qui est dirigé vers le centre du berceau, et qui contient la face du voussoir dont le développement est le triangle *e'd'k'*, formé de deux droites *e'd'*, *d'k'* respectivement égales à *ed*, *d'k*, et d'un arc *e'k'* du grand cercle du berceau sphérique contenu dans le plan vertical *d'k'*. La face verticale *e'd'*, qu'on nomme *parement*, est représentée dans sa véritable grandeur, *fig. p.* Elle se compose de deux horizontales, d'une verticale égale à *ed*, et d'un arc d'hyperbole *γd'*, intersection du cône droit du mur en tour ronde, en talus, et du plan vertical *e'd'*.

Nous pouvons maintenant faire l'énumération des faces et des arêtes du voussoir de la porte N° 2. *(fig. p.)*

1° Cinq faces planes, dont quatre perpendiculaires au plan du profil, y sont représentées par les droites *be*, *ed*, *dc*, *ac*, et la cinquième verticale a pour trace sur le plan horizontal, la droite *d'k'*.

2° Trois faces courbes situées, l'une sur le cône qui termine le mur extérieurement, et les deux autres sur les cylindres de la porte et du berceau.

3° Dix-sept arêtes, dont sept sont des lignes droites, huit des courbes planes, et les deux dernières, des courbes à double courbure, intersections des trois faces courbes.

PORTE N° 3. (*App.*, pl. 3.)

Arrière-voussure de Marseille.

Définition.

30. La porte qu'on nomme *arrière-voussure de Marseille*, se compose d'une porte droite pratiquée dans l'épaisseur d'un mur droit, et d'une petite voûte ou *voussure*, destinée à couvrir l'évasement de cette porte. L'objet de l'évasement est de faciliter l'entrée des voitures, et d'empêcher qu'elles ne choquent les venteaux en bois, qui doivent fermer la porte droite en pierres.

Le plan horizontal des naissances de la porte droite coupe le mur qui sert de pied-droit à cette porte; la section (fig. 1) est composée de deux parties $XabcdeY$, $X'a'b'c'd'e'Y'$, égales et symétriquement placées par rapport à l'axe aa de la surface cylindrique de la porte droite. La porte droite ne couvre que la partie du passage, comprise entre les deux plans verticaux XX' , ee' . Elle s'élargit d'une quantité bc , ou $b'c'$, pour couvrir l'espace compris entre les deux plans verticaux ee' , dd' , qui doit être occupé par les venteaux destinés à fermer la porte droite. Ces venteaux tournent sur des gonds placés dans les angles bcd , $b'c'd'$ de la feuillure, laquelle a pour génératrices le système des deux droites égales et rectangulaires bc , cd ou $b'c'$, $c'd'$ tournant autour de l'axe aa de la surface cylindrique de la porte.

31. L'élargissement de la porte droite est suivi d'un évasement qui est déterminé par l'angle des deux droites cd , de , ou $c'd'$, $d'e'$. L'arrière-voissure couvre l'espace compris entre les deux plans verticaux dd' , ee' ; la section de cet espace par le plan des naissances de la porte droite, est le trapèze $dd'ee'$. Soit xx' (fig. 2) la trace horizontale d'un plan vertical parallèle aux faces XX' , YY' du mur. La première surface de l'arrière-voissure a pour génératrice une ligne droite, dont chaque position est déterminée par ces trois conditions, 1° de passer par le cercle vertical de la feuillure, du diamètre dd' ; 2° d'être coupée par le plan vertical $Yee'Y'$, suivant un arc de cercle (ee' , hkk) (fig. 1 et 2), dont le centre est sur la verticale (a , aa'); 3° de passer par l'axe horizontal aa .

32. L'arrière-voissure et la feuillure ont les mêmes plans de joints que la porte droite; et parce que tous les plans de joints de cette porte passent par l'axe aa , il s'ensuit qu'ils coupent la surface de l'arrière-voissure suivant des lignes droites, qui sont les arêtes de donnelle de cette voissure.

Le joint normal à la surface de l'arrière-voissure suivant une arête de donnelle, serait (page 255, art. 174, liv. II) un paraboloïde; à cause de la petitesse de la voûte, on en simplifie la construction, en prenant pour joints de donnelle, les prolongemens des joints de la porte droite.

Des surfaces réglées de l'arrière-voissure.

33. Supposons d'abord que l'arc de cercle (ee' , hkk), qui sert de directrice à la droite génératrice de la première surface de l'arrière-voissure, soit donné. Cet arc, quel que soit son rayon, sera coupé par les verticales des plans d'ébrasement (e , eh), (e' , $e'h'$), en deux points; les plans menés par ces points et par l'axe aa de la porte droite, coupent le cercle de la feuillure dd' (fig. 1), en deux autres points (s , s'), (q , q'): ces quatre points déterminent la po-

sition et les longueurs des droites extrêmes (es' , hs'), ($e'q'$, hq') de la première surface de l'arrière-voissure; d'où il suit que cette surface couvre seulement l'espace qui correspond à la partie $ee's'q'$ (fig. 1) du trapèze $ed'e'd'$.

Deux autres surfaces réglées, dont les génératrices passent, comme pour la première surface, par le cercle de feuillure dd' (fig. 1) et par l'axe as de la porte droite, couvrent les espaces correspondans aux deux triangles eds' , $e'd'q'$; elles ont pour directrices des cercles de même rayon, donnés dans les plans d'ébrasement de , $d'e'$ (fig. 1). L'un de ces cercles passe par le point d , et a son centre sur la droite ds ; l'autre passe par le point d' , et a son centre sur la droite $d's'$. Le rayon de ces cercles est au moins égal à la moitié de la largeur dd' de la feuillure; s'il était plus petit, les ventaux en bois, qui sont formés de deux quarts de cercle du rayon df on $d'f = \frac{dd'}{2}$, et qui tournent autour des verticales d , d' , ne pourraient pas s'appliquer contre les plans d'ébrasement. Soit $s'q'k'$ (fig. 3) le cercle donné dans le plan de l'ébrasement $d'e'$ (fig. 1). Ayant porté la largeur $d'e'$ (fig. 1) de l'ébrasement, en $s'e''$ (fig. 3), la verticale $e''k'$ détermine l'arc de cercle $s'q'k'$ de la seconde surface de l'arrière-voissure, et par conséquent le plan tangent à cette surface au point (e' , k') (figs. 1, 2), ou k' (fig. 3) du plan de l'ébrasement. Cet arc $s'q'k'$ du plan de l'ébrasement étant connu, on en déduit celui de la première surface de l'arrière-voissure, qui est contenu dans le plan vertical YY' , par la condition que les deux surfaces se raccordent suivant la droite ($e'q'r$, $hq'a'$), qui leur est commune. En effet, ces deux surfaces ont déjà les mêmes plans tangens, aux deux points (r , a'), (q' , q) de cette droite; il suffit donc (page 96, art. 161, liv. I^{re}), pour qu'elles se raccordent suivant la droite entière, qu'elles aient un plan tangent commun au troisième point (e' , k'), ou k' (fig. 3): or le plan tangent en ce point k' de la seconde surface, passe par la tangente km à l'arc $s'q'k'$ donné dans le plan d'ébrasement $d'e'$ (fig. 1), et cette tangente coupe la verticale (d' , sm) au point (d' , m); d'où il suit que le plan tangent coupe le plan dd' (fig. 1) du cercle de la feuillure suivant la droite ($q'd'$, qm) (figs. 1 et 2), et par conséquent le plan parallèle YY' (fig. 1) de la face du mur, suivant une parallèle (YY' , km'). La perpendiculaire kw à km' coupant la droite sa en un point w de la verticale (as , $a's$), qui est le centre du cercle de l'arc (YY' , hkk'), le rayon de cet arc est déterminé.

34. De ces deux arcs $s'q'k'$ (fig. 3), hkk' (fig. 2), qui ont un point commun k' (fig. 3), le premier détermine le second, et nous n'avions d'abord supposé (art. précédent) le second arc connu, que pour faire voir que la première surface de l'arrière-voissure, qui a pour directrice ce second arc hkk' , ne pouvait pas couvrir tout l'espace correspondant au trapèze $dd'ee'$. Ces deux arcs

doivent encore satisfaire à une autre condition que celle du raccordement des deux surfaces de l'arrière-voissure. Il faut que ces surfaces ne soient pas rencontrées par les venteaux de la porte, c'est-à-dire par les surfaces de révolution qui ont pour génératrices les quarts de cercle $(d'f, \delta qn)$, $(df, \delta sn)$, tournant autour des verticales $(d', \delta m)$, $(d, \delta p)$.

Dans le cas où, ayant pris le rayon de l'arc $\delta k'$ (*fig. 3*) égal à celui du venteau, cette rencontre aurait lieu, on augmenterait le rayon de cet arc, et l'arrière-voissure serait surmontée. Pour s'assurer qu'elle est assez surmontée, on coupe les deux surfaces de l'arrière-voissure, et la surface de révolution qui a pour génératrice le quart de cercle des venteaux, par des plans verticaux 1.2, 3.4 (*fig. 1*), parallèles aux faces XX' , YY' du mur; et lorsque les lignes d'intersection projetées (*fig. 2*) ne se rencontrent pas, on conclut que les trois surfaces de l'arrière-voissure et la surface de révolution ne se pénètrent pas. Ces lignes d'intersection seraient encore nécessaires, dans le cas où l'on n'exécuterait pas d'une seule pierre chaque voussoir de l'arrière-voissure.

35. Le mur qui sert de pieds-droits à l'arrière-voissure de Marseille, se compose de parallélépipèdes en pierre à joints verticaux, posés par assises, de manière que les joints de deux assises consécutives ne coïncident pas. La hauteur des pieds-droits d'une porte droite, et la largeur de cette porte, sont, d'après les règles usitées de l'architecture, dans le rapport des deux droites données $a'a'$, $q'q'$ (*fig. 2*).

Construction de l'épure.

36. Les panneaux de tête étant donnés dans leur véritable grandeur sur le mur vertical XX' , on n'a besoin, pour l'application du trait sur la pierre, que du développement des panneaux de joints. Tous ces joints ont pour la porte droite et la feuillure, une partie commune GFEBGD (*fig. 4*); et pour l'arrière-voissure, il faut ajouter ou le système de deux droites Dx , xG , ou le système des trois droites Dy , yz , zG , selon que les plans de joint ne rencontrent que la première surface de l'arrière-voissure, ou qu'ils coupent la seconde surface et l'un des plans d'ébrasement. Dans ce second cas, la droite Dy appartient à la seconde surface de l'arrière-voissure, la droite yz au plan d'ébrasement, et la droite zG au plan de tête YY' . Dans le premier cas, les deux droites Dy , yz se réduisent à une seule Dx , et la droite zG devient xG .

PORTE N° 4. (Fig. 1 et 2, *Appendice*, pl. 4.)

Biais passé ou corne de vache.

37. La porte qu'on nomme *biais passé* est une petite voûte destinée à couvrir un passage biais qui est pratiqué dans l'épaisseur d'un mur droit. Le plan des naissances de cette porte coupe les deux plans verticaux des pieds-droits suivant deux horizontales parallèles, et les deux faces verticales du mur droit suivant deux autres horizontales parallèles; par le centre du parallélogramme oblique formé par ces quatre horizontales, on imagine une droite perpendiculaire aux faces du mur, et on demande que tous les plans de joints passent par cette droite, afin que la poussée qui s'exerce perpendiculairement aux joints soit dirigée dans le sens de la longueur du mur. Nous nommons cette droite *l'axe des joints*.

38. On donne sur les faces du mur deux cercles égaux, qui ont pour diamètres deux des quatre horizontales précédentes, et la surface de la porte doit passer par ces cercles. Le cylindre oblique (fig. 1), dont la génératrice est parallèle aux deux autres horizontales du parallélogramme, satisfait à cette condition; mais il sera coupé par les plans de joints suivant des ellipses.

Pour que les arêtes de douelles soient des droites, on prend (fig. 2) pour la surface du biais passé, une surface réglée qui a pour directrices, 1° les deux cercles donnés dans les faces verticales du mur; 2° la droite, *axe des joints*. Chaque plan de joint coupera les deux cercles en deux points, et la droite qui joindra ces deux points, sera l'arête de douelle contenue dans ce plan.

39. Lorsque le mur est trop épais pour que les voussours s'étendent d'une face du mur à l'autre, on les divise par des plans verticaux parallèles à ces faces. Ces plans coupent la surface du biais passé suivant des lignes qu'il faut construire. Dans le cas où cette surface est un cylindre, les sections sont des cercles. Dans le cas où la surface est réglée, on a vu (pag. 91, art. 153, liv. 1^{re}) comment on trouve l'intersection de cette surface par un plan, et la tangente en un point quelconque de cette intersection.

Quelle que soit la surface du biais passé, on développera les plans de joints, en les faisant tourner autour de leur axe commun, donné sur le plan des naissances de la porte. Ce développement contiendra les panneaux de joints, nécessaires pour l'application du trait sur la pierre.

§ II. DES VOUTES. (Pl. n° 1-2-3-4.)

40. La construction des grandes voûtes est soumise à certaines règles, dont on ne peut s'écarter que pour de petites voûtes telles que les portes, dont il a été question dans le paragraphe précédent. Lorsque des voûtes sont destinées à couvrir de grands espaces, on les nomme *maitresses voûtes*, ou simplement *voûtes*. L'appareil et l'ordonnance de ces voûtes doivent satisfaire à plusieurs conditions, d'où dépendent la stabilité et l'effet des décorations extérieures. On a déjà vu (art. 15 de cet Appendice) que la coupe des pierres a principalement pour objet la distribution des voûtes en voussoirs, et la division des surfaces de voûtes en douelles. Les recherches sur le meilleur mode de division, ont conduit à ces résultats : 1° le joint de deux voussoirs consécutifs doit être, pour chaque point de la ligne d'intersection de la surface du joint et de la douelle commune aux deux voussoirs, perpendiculaire à cette douelle, afin que l'angle d'une douelle et du joint étant égal pour tous les voussoirs, ces voussoirs résistent également aux pressions qu'ils supportent ; ce qui n'aurait pas lieu, si l'angle était obtus pour l'un des voussoirs, puisqu'il serait nécessairement aigu pour l'autre, 2° Il est nécessaire, par la même raison, que les surfaces de joints d'un voussoir et de tous ceux qui l'environnent, soient perpendiculaires entre elles. 3° Ces surfaces doivent être engendrées par le mouvement d'une ligne droite, parce qu'elles sont dans ce cas susceptibles d'une exécution plus parfaite, et qu'une légère incorrection dans un joint, entraîne la rupture de l'un des voussoirs auquel ce joint appartient. 4° Il faut que les joints soient formés par des surfaces développables, afin que les panneaux ou développemens de ces surfaces puissent être appliqués sur les faces des voussoirs, et en donner exactement les contours.

Monge a fait voir que toutes ces conditions sont remplies, en divisant la surface d'une voûte en ses lignes de courbure. C'est à ce géomètre qu'on doit la théorie de ces lignes, et leur application à la division des voûtes en voussoirs.

Exposé sommaire des propriétés des lignes de courbure (extrait du Journal de l'École polytechnique, second cahier, année 1796).

41. Après avoir conçu par un point quelconque d'une surface courbe une normale à cette surface, si l'on veut passer au point infiniment voisin pour lequel la nouvelle normale soit dans le même plan que la première, et la ren-

contre par conséquent en un point, on peut toujours le faire dans deux directions; ces deux directions sont à angles droits sur la surface, et elles sont les seules qui donnent ce résultat, si l'on en excepte le cas particulier de la sphère pour toute la surface, et de quelques points remarquables pour d'autres, tels que les sommets des surfaces de révolution.

Les deux points dans lesquels chaque normale est rencontrée par les deux normales infiniment voisines, sont les centres des deux courbures de la surface dans le point que l'on considère; les distances de ces deux points à celui de la surface, sont les rayons des deux courbures; et les directions rectangulaires dans lesquelles on passe de la normale aux deux normales consécutives qui la coupent, sont les directions de ces courbures.

Si l'on conçoit que le point de la surface se meuve de manière qu'à chaque instant, des directions des deux courbures, il suive celle qui est dans un premier sens, et qu'il continue ainsi de se mouvoir autant que le permettra l'étendue de la surface, la courbe qu'il parcourra, sera celle de l'une des courbures. En concevant pour chaque point une courbe parcourue de cette manière, on aura la suite des lignes de la première courbure, qui diviseront l'aire de la surface courbe en zones, suivant une première direction. Si l'on conçoit que le point de la surface, au lieu de suivre dans son mouvement la direction de la première courbure, suive au contraire constamment celle de la seconde, il parcourra une courbe de la seconde courbure; et cette courbe coupera toutes celles de la première à angles droits. En concevant pour chaque point une courbe parcourue de cette seconde manière, on aura la suite des lignes de la seconde courbure, qui diviseront l'aire de la surface en d'autres zones, suivant une nouvelle direction. Enfin chacune des lignes de l'une de ces deux suites étant perpendiculaire à toutes celles de l'autre suite et réciproquement, il s'ensuit que les deux suites de lignes de courbure diviseront l'aire de la surface courbe en éléments, qui seront tous rectangulaires. Cela peut être rendu sensible sur les surfaces de révolution prises pour exemple.

Sur les surfaces de révolution, on ne peut passer d'un point à un autre point lequel les deux normales soient dans un même plan, à moins qu'on ne suive ou la direction du méridien, ou celle du parallèle qui passe par ce point; suivant toute autre direction, les deux normales ne se rencontreraient pas, puisqu'étant dans des méridiens différens, elles ne passeraient pas par le même point de l'axe. Les méridiens sont donc la suite des lignes d'une des courbures, et les parallèles la suite de celles de l'autre. Chaque courbe de l'une de ces suites est perpendiculaire à toutes celles de l'autre, et les deux suites divisent l'aire de la surface en éléments que l'on peut regarder comme rectangulaires.

Si la normale se meut de manière, que, sans cesser d'être perpendiculaire à la surface, elle parcourt une ligne de courbure; dans chaque instant de son mouvement, elle se portera sur une des deux normales infiniment voisines qui la coupent, et elle engendrera une surface qui sera développable, qui sera partout perpendiculaire à la surface courbe, et qui coupera celle-ci dans une de ses lignes de courbure.

Si, pour le même point, la normale parcourt la ligne de l'autre courbure, elle engendrera de même une seconde surface développable normale à la surface courbe et qui rencontrera la première en ligne droite et à angles droits. Si l'on conçoit donc une semblable surface pour chacune des lignes de courbure de l'une et de l'autre suite, on aura deux suites de surfaces développables normales à la surface courbe, et telles que chacune de celles d'une des suites rencontrera toutes celles de l'autre suite en lignes droites et à angles droits. Toutes ces surfaces développables normales diviseront l'espace en élémens indéfinis dans le sens de la longueur de la normale, infiniment étroits dans les sens des deux courbures, et terminés par quatre plans rectangulaires entre eux, et par quatre arêtes indéfinies et en lignes droites.

De l'usage des lignes de courbure dans la division des voûtes en voussoirs.

43. En divisant la surface de la voûte par les lignes des deux courbures, espacées entre elles d'une quantité dépendante de la nature des matériaux, les joints seront formés par les surfaces développables normales à la surface de la voûte. Si les joints sont apparens sur la surface de la voûte, ils y traceront des courbes toutes rectangulaires entre elles, et qui dépendant de la nature même de la surface, en rendront la génération plus prononcée. Enfin ces courbes diviseront la surface de la voûte en compartimens rectangulaires, susceptibles d'une décoration propre à la surface.

C'est vers cette solution générale que les artistes s'étaient toujours dirigés; ils ne l'avaient atteinte que pour les cas faciles des surfaces cylindriques, des surfaces coniques et décollées de révolution. Quant aux autres surfaces courbes dont ils ne connaissaient pas les lignes de courbure, ils les excluaient presque généralement de la composition des voûtes, lors même que les circonstances les exigeaient impérieusement; et c'est à cela principalement qu'on doit attribuer le mauvais effet que produisent en général dans l'architecture, les morceaux de traits de coupe des pierres, parce que pour rendre un trait extensible, on ne choisit pas toujours la surface de la voûte la plus convenable.

VOÛTES TERMINÉES PAR UNE SURFACE UNIQUE. N^o 1, 2, *App.*, pl. 5 et 6.

Voûte sphérique. N^o 1, *App.*, pl. 5.

43. Cette voûte est destinée à couvrir une salle circulaire; elle a pour pied-droit, un mur en tour ronde, terminé intérieurement par un cylindre droit. La section de ce cylindre par le plan horizontal des naissances de la voûte, est un cercle, qu'on prend pour le grand cercle de la surface sphérique de la voûte. Un plan vertical quelconque, passant par le centre de cette surface, la coupe suivant un demi-cercle, qu'on divise en parties égales de nombre impair. La figure génératrice de la voûte contenue dans ce plan, ne diffère pas de la section droite de la porte droite N^o 1 (*App.*, pl. 1). Elle tourne autour de l'axe vertical du mur en tour ronde, et il résulte de ce mouvement, 1^o que les arêtes de douelles de la voûte sont des cercles horizontaux; 2^o que les joints normaux suivant ces arêtes sont des cônes droits qui ont leurs sommets sur l'axe du mur en tour ronde; 3^o que chaque assise de la voûte a pour faces extérieures un cylindre droit vertical, un plan horizontal, et pour arêtes, des circonférences de cercles.

Pour partager les assises de la voûte en voussoirs, on divise le cercle de la naissance de la voûte en parties égales; les plans menés par les points de divisions et par l'axe vertical du mur en tour ronde, partagent la première assise en voussoirs. Un second système de plans verticaux menés par le même axe, et qui partage en deux parties égales les angles des plans du premier système, divise la seconde assise en voussoirs.

Toutes les assises ont leurs joints verticaux dans l'un ou l'autre de ces deux systèmes de plans, de manière que les joints de deux assises consécutives ne soient pas dans le même plan vertical.

Le cercle générateur de la voûte sphérique ayant été divisé en un nombre impair de parties égales, l'arc placé au milieu du demi-cercle, engendre la douelle du voussoir qu'on nomme la *cléf* de la voûte.

Construction de l'épure.

44. On prend pour plan horizontal de projection, le plan des naissances de la voûte sphérique. La projection horizontale d'un voussoir de la voûte sphérique, et la figure génératrice de ce voussoir, donnée dans un plan vertical, déterminent les dimensions du parallépipède rectangle capable de le contenir. L'une des faces de ce parallépipède coupe la surface de la voûte

suyvant un cercle, dont on détermine le centre et le rayon. On rapporte ce cercle sur la face, et au moyen d'une *cherche* ou *panneau* découpe suivant le grand cercle de la sphère, on exécute l'*écuelle*, ou la surface intérieure du voussoir, sur laquelle on rapporte le contour de la douelle de ce voussoir. Les surfaces coniques, cylindriques, planes du même voussoir, s'exécutent par les procédés qu'on a déjà indiqués.

Voute ellipsoïde, N° 2. (App., pl. 6.)

45. La voute ellipsoïde est terminée par la surface du second degré, qu'on a nommée *ellipsoïde* (art. 134, liv. I^{re}). L'ellipsoïde a pour axes principaux les trois droites rectangulaires AB, CD, 2EK; en supposant les deux premiers axes AB, CD dans le plan horizontal de l'ellipse ABCD, le troisième axe est vertical. Tout plan passant par ce troisième axe coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse qui a pour axes principaux la droite 2KE et un diamètre de l'ellipse ABCD. La surface *ellipsoïde* a pour lignes de courbure, des courbes à double courbure, dont les projections sur les plans de ses trois sections principales, sont des courbes du second degré. Soit ABCD la section principale, qui passe par le plus grand axe AB et par le moyen axe CD; CDE la demi-section principale, qui passe par le moyen axe, et par le plus petit axe, double de la droite EK. La première série de lignes de courbure se projette sur le plan de l'ellipse ABCD, suivant un système d'ellipses, dont les sommets approchent continuellement de deux points O, O', sans pouvoir les atteindre.

La seconde série se projette sur le même plan, suivant un système d'hyperboles, dont les sommets ont pour limites les mêmes points O, O'.

Les verticales élevées par ces points, coupent la surface de l'ellipsoïde en deux points, que Monge a nommés *ombilics*.

Les ellipses et les hyperboles, projections des deux séries de lignes de courbure, se construisent au moyen d'un quart d'ellipse OLG et d'une portion OHH d'hyperbole, qui ont même centre K, et deux axes communs KO, KG.

Construction géométrique des points O et O'.

46. L'ellipsoïde ayant pour axes principaux les trois droites AB, CD, 2EK, et pour centre le point K, soient F, f, f, les foyers respectifs des trois sections principales, construits sur les couples d'axes (AB, CD), (CD, 2EK), (2EK = 2EK, AB).

Pour construire le point O, on porte KI et KF sur l'axe CKD prolongé, de K en f' et en F'; on tire la droite f'B, et sa parallèle F'O, qui coupe l'axe AB au point O.

Pour construire le point G, on porte sur KB la droite $Kf' = Kf$; on mène la droite $f'D$, et sa parallèle FC , qui coupe l'axe KD prolongé, au point G; ce qui détermine les droites rectangulaires KO, KG, distances des points O, G au centre K de l'ellipsoïde.

Construction d'une ellipse telle que NMN, ou d'une hyperbole RPR, projection d'une ligne de courbure de l'ellipsoïde.

47. On trace sur les droites KG, KO comme axes principaux, l'ellipse OLG, et l'hyperbole OIH. D'un point quelconque H de l'hyperbole, on abaisse les perpendiculaires HM, HN sur les axes de l'ellipsoïde KD, KB; les pieds M, N de ces perpendiculaires sont les sommets de l'ellipse NMN.

D'un point quelconque L de l'ellipse OLG, on abaisse les perpendiculaires LP, LQ sur les axes de l'ellipsoïde KB, KD; les pieds P et Q de ces perpendiculaires sont les sommets de l'hyperbole aux branches RPR', SP'S'.

Des trois points H, M, N ou L, P, Q, un étant donné, il est évident que les deux autres sont connus. Les points tels que M, pourraient être déterminés par la condition que les lignes de courbure diviseraient l'ellipse CDE en arcs sous-tendant la même corde. On effectuerait d'abord cette division sur l'ellipse, et on abaisserait par les points de division des perpendiculaires sur l'axe CD; les pieds de ces perpendiculaires seraient les sommets M, M',... des ellipses, projections d'un système de lignes de courbure. A chaque point M ainsi déterminé, correspondraient deux points H et N, l'un sur l'hyperbole auxiliaire OIH, et l'autre sur l'axe AD.

De la voûte ellipsoïde, surmontée et surbaissée.

48. Les trois axes principaux de la surface de la voûte ellipsoïde, étant inégaux, l'axe vertical peut être ou plus grand ou plus petit que les deux autres: dans le premier cas, la voûte est surmontée; dans le second, elle est surbaissée.

La voûte surmontée (*Mémoire cité de Monge, page 288*) aurait en général plus de hardiesse et de dignité, et si la naissance était elle-même à une grande hauteur, quelle que fût d'ailleurs la destination de l'emplacement, ce serait la voûte surmontée qu'il faudrait employer, parce que sa grande élévation, qui ferait paraître ses dimensions verticales plus petites qu'elles ne seraient réellement, écraserait trop une voûte qui serait d'une autre espèce. La voûte surbaissée, en diminuant le volume de l'air compris dans l'emplacement, serait plus favorable à la voix d'un orateur. Si l'emplacement devait être éclairé par deux lustres suspendus à la voûte, il faudrait que cette voûte

fût surmontée ou surbaissée, parce que dans ces deux cas, sa surface aurait deux ombilics, placés symétriquement au-dessus du grand axe de l'ellipse horizontale, et que ces ombilics, rendus très-apparens par les compartimens qui se distribueraient autour d'eux, seraient les points naturels de suspension; alors on pourrait disposer du rapport entre les trois ares, pour que ces points fussent espacés d'une manière convenable.

Des amphithéâtres.

49. Les emplacements dont on a pu disposer pour les salles des assemblées délibérantes, ont souvent forcé de donner à l'amphithéâtre moins de profondeur en face de l'orateur que sur les côtés; mais l'expérience ayant prouvé que la voix se porte à une plus grande distance en face, il paraît que c'est une disposition toute contraire qu'on devrait adopter. De toutes les formes qu'on pourrait donner à l'amphithéâtre, il n'y en a aucune dont la loi soit plus simple et plus gracieuse que l'ellipse; il faudrait donc que la salle fût elliptique, et qu'elle fût couverte par une voûte. En plaçant le bureau à l'un des sommets de l'ellipse, on pourrait lui conserver un espace suffisant pour la commodité du service, et l'orateur se trouverait naturellement placé sous un des ombilics de la voûte; l'amphithéâtre n'occuperait que la partie qui serait en avant. Une galerie qui ferait le tour entier de la salle, et qui serait assez élevée pour être très-distincte de l'amphithéâtre, fournirait des places au public. La salle, qui n'aurait ni tribune ni aucune espèce d'irrégularité, pourrait être décorée par des colonnes, à chacune desquelles correspondrait une nervure de la voûte, pliée suivant la ligne de courbure ascendante. Toutes ces nervures, verticales à leur naissance, se courberaient autour de l'un ou l'autre ombilic, redescendraient ensuite à plomb sur les colonnes opposées, et elles seraient croisées perpendiculairement par d'autres nervures pliées suivant les lignes de l'autre courbure. Les intervalles de ces nervures pourraient être à jour, soit pour éclairer la salle, soit pour donner des issues à l'air, et formeraient un vitrage moins fantastique que les roses de nos églises gothiques. Enfin deux lustres suspendus aux ombilics de la voûte, et à la suspension desquels la voûte entière semblerait concourir, serviraient à éclairer la salle pendant la nuit.

Nous n'entrerons pas (*continue Monge*) dans de plus grands détails à cet égard; il nous suffit d'avoir indiqué aux artistes un objet simple, et dont la décoration, quoique très-riche, pourrait n'avoir rien d'arbitraire, puisqu'elle consisterait principalement à dévoiler à tous les yeux une ordonnance très-gracieuse, qui est dans la nature même de cet objet.

VOÛTES TERMINÉES PAR DEUX SURFACES QUI SE PÉNÈTRENT.

N° 3 et 4 (*App.*, pl. 7 et 8).*Voûte d'arête barlongue. N° 3. (App., pl. 7.)*

50. Les voûtes N° 1 et 2 (*App.*, pl. 5 et 6) sont terminées chacune par une surface unique. Les voussours des voûtes n° 3 et 4, appartiennent à deux voûtes qui se *rachètent*, ou dont les surfaces se pénètrent. Chacune de ces voussours a deux douelles, quatre arêtes de douelles; et quatre joints normaux suivant ces arêtes.

Les grandes voûtes qui se rachètent ont mêmes naissances et sont égales en montee, c'est-à-dire qu'elles ont leurs naissances dans le même plan horizontal, et même plan tangent au point le plus élevé de la ligne d'intersection des surfaces qui les terminent. Les quatre arêtes de douelles d'un voussour des voûtes N° 3 et 4, sont situées deux à deux dans un même plan horizontal.

Définition des voûtes d'arête barlongue, et en arc de cloître. N° 3. (App., pl. 7.)

51. Ces voûtes sont destinées à couvrir l'espace renfermé entre quatre plans verticaux parallèles deux à deux. La section de ces quatre plans par un plan horizontal est un parallélogramme; selon que ce parallélogramme est rectangle ou oblique, la voûte est droite ou braise. Les plans verticaux qui passent par les côtés de ce parallélogramme, ou seulement par les prolongemens de ces côtés, terminent les murs qui servent de pieds-droits à la voûte; dans le cas où ils passent seulement par les prolongemens, les murs sont entre eux un angle saillant dans l'intérieur de l'espace voûté, et ne s'étendent pas au-delà des verticales, intersections des quatre plans verticaux des pieds-droits. La voûte d'arête se nomme, dans ce cas, *barlongue*. Lorsque les faces verticales des pieds-droits sont de même longueur que les côtés du parallélogramme non prolongés, la voûte prend le nom d'*arc de cloître*.

Les murs des pieds-droits d'un arc de cloître sont entre eux un angle rentrant vers l'intérieur de l'espace voûté. La voûte d'arête barlongue couvre l'espace vers lequel viennent aboutir quatre berceaux cylindriques, qui sont deux à deux les prolongemens l'un de l'autre. Il n'y a que les quatre premiers voussours de cette voûte, placés aux angles saillans des pieds-droits, qui posent sur ces pieds-droits; toute la première assise de l'arc de cloître a sa naissance sur les pieds-droits de cet arc.

Pour l'une et l'autre voûte N° 3, la section des pieds-droits par le plan ho-

horizontal des naissances, est un parallélogramme rectangle, dont les côtés appartiennent aux deux surfaces cylindriques de ces voûtes. L'une de ces surfaces a pour base un cercle, et on détermine la base de l'autre surface, par la condition qu'elles aient pour lignes d'intersection, les deux courbes planes qu'on obtient en coupant la première surface par deux plans verticaux, dont les traces horizontales sont les diagonales du parallélogramme rectangle (page 118, art. 202, liv. 1^{er}). Ces courbes forment l'arête de la voûte, ou l'intersection des deux surfaces cylindriques, lesquelles font un angle saillant sur la voûte barlongue, et un angle rentrant sur l'arc de cloître.

La base de la première surface cylindrique étant un cercle, l'arête se compose de deux ellipses égales qui ont pour axe commun vertical, une droite égale au rayon de ce cercle, et pour axes horizontaux, les diagonales du parallélogramme des pieds-droits. La seconde surface cylindrique de l'arc de cloître est surhaussée ou surbaissée, selon que la première, qui a pour base un cercle, passe par les plus petits ou par les plus grands côtés du même parallélogramme; le même effet a lieu pour la voûte d'arête barlongue, en supposant les surfaces cylindriques prolongées.

Construction de l'épure.

52. On considère d'abord le berceau terminé par la surface cylindrique à base circulaire. La section droite de ce berceau ne diffère pas de celle de la porte droite N° 1 *App.*, pl. 1; cette section contient les panneaux de tête des voussoirs du premier berceau, et détermine pour chaque voussoir la douelle et les joints normaux. Les arêtes de douelles des deux berceaux étant pour chaque voussoir dans le même plan horizontal, et se rencontrant en un point de la ligne d'intersection des surfaces des deux berceaux, les arêtes de douelles du second berceau et les joints normaux suivant ces arêtes sont déterminés.

Chaque voussoir de la voûte a une douelle qui appartient au premier berceau, et deux joints normaux adjacens à cette douelle; on déduit de la projection horizontale; et de la section droite du berceau à base circulaire, le développement de cette douelle et des deux joints. Ce développement et les deux panneaux de tête de chaque voussoir, donnent tout ce qui est nécessaire pour l'application du trait sur la pierre, et pour la construction du voussoir entier.

Le plan de l'épure N° 3, *App.*, pl. 7, est divisé en deux parties égales, relatives l'une à la voûte d'arête barlongue, et l'autre à l'arc de cloître.

Voûte d'arête en tour ronde. N° 4, App. pl. 8.

53. La voûte d'arête en tour ronde, se compose de voussoirs, qui appartiennent en même temps à deux voûtes, terminées l'une par une surface *annulaire*, et l'autre par une surface *conoïde*. (Voyez la définition de ces surfaces, art. 118 et 152, liv. I^{re}.)

La voûte annulaire s'emploie pour couvrir l'espace renfermé entre deux cylindres verticaux qui ont pour sections droites, des cercles concentriques. L'aire comprise entre ces cercles est la projection horizontale de l'espace qui est couvert par la voûte. On se sert de la voûte *conoïde* pour couvrir l'espace compris dans l'angle de deux plans verticaux.

La voûte annulaire a pour pieds-droits deux murs en tour ronde concentriques. La section méridienne de cette voûte ne diffère pas de la section de la porte droite N° 1, App., pl. 1; elle se construit comme la voûte sphérique N° 1, App., pl. 5. Qu'on imagine par l'axe vertical des pieds-droits, deux plans qui coupent ces pieds-droits, et entre lesquels se fait le passage de l'intérieur à l'extérieur de la voûte annulaire. On couvre ce passage par une voûte *conoïde*. La surface de cette voûte est engendrée par une droite horizontale, qui passe constamment par l'axe vertical des murs en tour ronde, et par une courbe donnée sur l'une des faces cylindriques du mur du plus grand diamètre.

Ayant pris pour cette courbe, celle dont la transformée est sur le développement du cylindre qui la contient, une ellipse dont l'axe vertical est égal au rayon du cercle générateur de la surface annulaire, les surfaces des deux voûtes sont égales en montée. Le second axe de l'ellipse est égal en longueur à un arc du cercle, base du cylindre sur lequel on enveloppe l'ellipse. Les plans verticaux des pieds-droits de la voûte conoïde coupent cet arc en deux points, et en déterminent la longueur.

Construction de l'épure.

54. Les deux surfaces annulaire et conoïde étant définies, et connaissant leurs paramètres, on construit la projection horizontale de leur ligne d'intersection, qui est une courbe à double courbure. Les arêtes de douelles circulaires de la voûte annulaire coupent l'arête de la voûte en des points, par lesquels on mène les arêtes de douelles rectilignes de la voûte conoïde. Les joints normaux suivant ces arêtes sont des cônes droits pour la première voûte, et des paraboloides pour la seconde. On a vu (art. 152, liv. I^{re}) com-

ment on détermine les plans tangens, et les normales au conoïde qui forment le parabolôïde normal.

Chaque voussoir commun aux deux voûtes est compris, 1° entre deux plans verticaux passant par l'axe du conoïde et de la surface annulaire; 2° entre deux surfaces cylindriques verticales concentriques aux pieds-droits. On développe ces deux surfaces, et on trace sur ce développement les lignes d'intersection de ces surfaces par la douelle conoïde, par les joints de cette douelle et par les faces adjacentes, en sorte qu'on puisse donner au voussoir la forme qu'il aurait, s'il n'appartenait qu'à la voûte conoïde. Les faces de ce voussoir étant exécutées, on y rapporte *par points*, et par la méthode indiquée (art. 7-14) de cet Appendice (page 301), les arêtes, intersections des deux douelles et des quatre joints normaux, ce qui déterminera le contour des faces appartenant à la voûte annulaire.

§ III. DES DESCENTES. (*App.*, pl. 9, 10, 11, 12.)

55. Les descentes sont de petites voûtes cylindriques, destinées à couvrir un terrain en pente, tel qu'une rampe d'escalier, un abat-jour de cave ou souterrain, etc. La surface des naissances d'une descente est parallèle à la surface du terrain couvert par cette descente. Il y a beaucoup d'analogie entre les portes et les descentes; terminées les unes et les autres par des surfaces cylindriques, elles diffèrent seulement entre elles par l'inclinaison des droites génératrices de ces surfaces : ces droites sont horizontales sur les portes, et inclinées à l'horizon sur les descentes. On pratique des descentes dans l'épaisseur de murs, ou droits ou en talus : un plan vertical, perpendiculaire à la face antérieure du mur, qui sert de pied-droit à la descente, est parallèle ou incliné par rapport à la droite génératrice du cylindre de cette descente; la surface de la descente est comprise entre les deux faces opposées d'un mur, où, après avoir traversé ce mur, elle est rencontrée par un berceau. Ces diverses circonstances font varier les formes des descentes, et on distingue ces voûtes, comme les portes, par les noms de *descente droite*, *descente droite et biaise*, *descente rachetant un berceau*, *descente en tour ronde*, etc.

Descente droite, en talus, rachetant un berceau. N° 1, App., pl. 9.

Descente biaisée, rachetant un berceau. N° 2 et 2 bis, App., pl. 10 et 11.

Definitions.

56. La descente N° 1, App., pl. 9, est construite dans l'épaisseur d'un mur terminé d'un côté par un plan vertical ou en talus, et de l'autre par un berceau cylindrique qui a ce mur pour pied-droit. Elle est destinée à couvrir le passage qui conduit au berceau souterrain; la largeur de ce passage est déterminée par la distance de deux plans verticaux, perpendiculaires à la face antérieure du mur, et à la droite génératrice du berceau racheté par la descente.

Le plan des naissances du berceau est horizontal; le plan des naissances de la voûte, qu'on nomme *plan des coussinets*, est incliné : ce second plan passe par l'horizontale du berceau, intersection du premier plan, et de la face verticale du mur, tangente à la surface du berceau; sa pente est égale à celle du chemin qui conduit au berceau.

Construction des épures. (App., pl. 9 et 10.)

57. On prend pour plans de projection, 1° le plan horizontal des naissances du berceau racheté; 2° le plan vertical parallèle aux droites du cylindre oblique des descentes N° 1 et 2, App., pl. 9 et 10, et perpendiculaire aux droites du berceau cylindrique, racheté par la descente.

La section de la descente N° 1, pl. 9, par la face du mur en dehors du berceau, ne diffère pas de la section de la porte N° 1, App., pl. 1. Cette figure détermine les arêtes de douelles de la descente; et parce que cette descente est une petite voûte, les joints ne sont pas nécessairement normaux au cylindre oblique qui la termine; ils passent tous par l'axe de ce cylindre.

En regardant la section de la descente par la face extérieure du mur, comme la base d'une surface cylindrique unique, on pourrait construire l'intersection de cette surface par la surface cylindrique du berceau, en coupant les deux surfaces par une suite de plans parallèles à leurs génératrices, ainsi qu'on l'a expliqué (art. 175, liv. I^{re}). On a préféré, dans ce cas particulier, les couper par une suite de plans verticaux parallèles aux droites de la première surface; ce qui simplifie cette seconde construction, c'est que les sections planes et parallèles du berceau sont égales.

On déduit des projections horizontale et verticale, l'axe droit ou la section droite de la descente, les développemens des panneaux de douelles et de joints,

et l'application du trait sur la pierre se fait comme pour les portes N° 1 et 2, *App.*, pl. 1 et 2.

58. Le plan des coussinets de la descente N° 1, *App.*, pl. 9, est coupé par la face du mur en dehors du berceau, suivant une droite horizontale; on prend la portion de cette droite qui est comprise entre les deux plans verticaux des pieds-droits de la descente, pour le diamètre du cercle, base du cylindre oblique qui termine la descente: ce diamètre, deux perpendiculaires à ce diamètre, menées par ses extrémités, et l'horizontale, intersection de la surface du berceau par le plan des coussinets, forment sur ce plan un parallélogramme rectangle. Si ce parallélogramme était oblique, les autres données restant les mêmes, la descente serait *biaise, ratchetant un berceau*. On a traité ce second cas dans les deux épures suivantes, N° 2 et 2 *bis*, *App.*, pl. 10 et 11.

59. La projection verticale sur un plan parallèle aux droites du cylindre de la descente, peut se faire de deux manières; elle est ou orthogonale ou oblique. L'épure N° 2 *bis* est construite par le second mode de projection, que j'ai expliqué (art. 217, liv. I^{re}). Les développemens de l'arc droit et des panneaux, ne diffèrent pas pour les mêmes données, de ceux qu'on trouve N° 1, *App.*, pl. 9, par la projection orthogonale.

Descente biaise, en tour ronde, ratchetant un berceau annulaire.

N° 3, *App.*, pl. 12.

Définition.

60. Cette descente est construite dans l'épaisseur d'un mur, terminé d'un côté par une surface cylindrique verticale, de l'autre par une surface annulaire. Elle est destinée à couvrir le passage qui conduit à un berceau annulaire souterrain. La largeur de ce passage est donnée; il est compris entre deux plans verticaux P et P', qui coupent les surfaces cylindriques, extérieure et intérieure du mur en tour-ronde, suivant quatre droites verticales, et la surface annulaire suivant deux courbes. Ces deux courbes sont égales, lorsque la descente est droite, et inégales, lorsqu'elle est biaise. Les plans verticaux P et P' terminent les pieds-droits de la descente.

On prend, comme précédemment, pour l'un des plans de projection, un plan vertical parallèle à l'un des plans P, P', et pour l'autre plan de projection, le plan horizontal des naissances du berceau annulaire.

De la surface cylindrique de la descente.

61. La droite génératrice de cette surface est parallèle aux plans P et P' des pieds-droits de la descente; son inclinaison par rapport au plan horizontal

étant donnée, la surface cylindrique de la descente sera déterminée, lorsqu'on aura la base de cette surface. On prend pour cette base un demi-cercle qui est enveloppé sur la face extérieure du mur en tour ronde, dont la section horizontale est un cercle donné. Les deux plans P et P' coupent ce dernier cercle en deux points; on rectifie l'arc compris entre ces deux points, et on décrit sur la droite de même longueur que l'arc, le demi-cercle qui forme sur le cylindre vertical du mur en tour ronde, la base de la surface cylindrique de la descente. La coupe de la descente par ce cylindre vertical étant développée, elle ne diffère pas de la section droite des portes N^o 1 et 2, *App.*, pl. 1 et 2 : cette coupe étant donnée, on l'enveloppe sur la face extérieure du mur en tour ronde; toutes les droites de son contour, en exceptant les verticales, deviennent des cercles ou des hélices. Considérant ces lignes comme des bases de surfaces cylindriques, qui ont pour arêtes des parallèles à la génératrice de la surface de la descente, les têtes des voussoirs de cette descente et toutes les surfaces de douelles et de joints sont déterminées.

Les douelles et les joints ont pour contours sur la face extérieure du mur en tour ronde, des lignes dont les transformées sont des arcs de cercle, et des lignes droites. La surface des coussinets, formée de droites parallèles à la génératrice de la surface de la descente, passe par l'arc de cercle de la face du mur en tour ronde, qu'on a rectifié pour tracer la coupe verticale et cylindrique de la descente; d'où il suit que la figure des voussoirs ne dépend plus que de la position qu'on assigne à cette coupe sur la face extérieure du mur en tour ronde, entre les deux plans verticaux qui la comprennent, et qui sont parallèles aux plans P et P'. On a déterminé cette position sur l'épure descente N^o 3, *App.*, pl. 12, par la considération que la descente et tous ses voussoirs soient au-dessus du plan horizontal des naissances du berceau annulaire. Pour satisfaire à cette condition, la droite qui termine le lit du voussoir le plus éloigné de l'axe du berceau racheté, et qui appartient à la surface des coussinets, passe par un point du cercle de la surface annulaire, situé dans le plan des naissances du berceau; on mène par ce point une parallèle à la génératrice de la surface cylindrique de la descente; elle coupe la face extérieure en tour ronde, au point du cercle horizontal de cette face, sur lequel le diamètre de la coupe cylindrique développée, doit s'envelopper. La hauteur de ce point et la coupe cylindrique de la descente étant connues, on construit en projection verticale l'intersection des surfaces cylindriques qui ont pour bases les lignes de cette coupe, par la surface annulaire. En appliquant la méthode générale qu'on a exposée (art. 146, liv. 1^{er}), on trouve chaque point de cette intersection, par la rencontre d'une droite, et d'une courbe de la surface annulaire.

Construction de l'épure et application du trait sur la pierre.

62. Ayant déduit des projections horizontale et verticale, l'arc droit de la descente, et les développemens des panneaux de douelles et de joints, chaque voussoir de la descente s'exécute par les procédés indiqués pour les portes.

Les joints des voussoirs de la descente en tour ronde, sont des cylindres qui ont pour bases des hélices : s'ils étaient plans et normaux aux douelles, en des points déterminés de chaque arête de douelle, le développement de la coupe cylindrique verticale de la descente, serait modifié ; les droites, transformées des hélices, deviendraient des transformées d'ellipses.

§ IV. DES TROMPES. (Pl. n^o 1-2-3-4.)

63. Les portes, les voûtes, les descentes entrent comme élémens nécessaires dans la composition de monumens et édifices qui satisfont à toutes les conditions de régularité et de symétrie ; il n'en est pas de même des voûtes qu'on appelle *trompes*, et qu'on n'emploie le plus souvent que pour remédier aux inconvéniens qui proviennent de l'irrégularité du terrain sur lequel on construit, ou pour étendre certaines parties d'édifices dans les étages supérieurs, ou pour changer dans ces étages quelques distributions intérieures. Cependant de petites trompes peuvent servir à couvrir des enfoncemens réguliers, qu'on pratique dans l'épaisseur des murs, pour recevoir des vases, des statues ou d'autres objets de décoration ; celles-là diffèrent des trompes destinées à soutenir des saillies, qui sont des *hors-d'œuvres*, que le bon goût en architecture exclut, et qu'on n'admet que lorsqu'on y est forcé par quelques circonstances.

Les trompes sont de petites voûtes terminées par des surfaces coniques. Étant destinées à soutenir des murs en saillie, elles supportent de grandes pressions, et par cette raison on les divise en voussoirs comme les grandes voûtes, par des plans normaux à leurs surfaces. Ces voussoirs ont pour arêtes de douelles, des droites qui concourent vers les sommets des cônes. On a aussi donné le nom de *trompes* à des voûtes terminées par des surfaces sphériques, cylindriques et autres, parce qu'elles sont appareillées comme les trompes, de manière que les courbes, arêtes de douelles, partent d'un point apparent de la naissance de la voûte. La partie de la voûte voisine de ce point est formée d'une seule pierre, qu'on nomme *trompillon*. Connaissant le cintre

de ce trompillon, la surface réglée normale qui passe par ce cintre, est déterminée; les voussoirs de la trompe sont compris entre le cintre extérieur de cette trompe, et le joint normal du trompillon.

Trompe dans l'angle, biaise, en talus. N° 1, App., pl. 13.

Définition.

64. Soit AE.A'E' la section horizontale d'un mur de bâtiment prolongé dans les deux sens BA et DE, et interrompu sur la longueur BD, base du triangle BCD. L'espace en coin qui se projette horizontalement suivant ce triangle, doit rester libre sur une hauteur donnée, à partir du niveau supérieur du terrain; on satisfait à cette condition, en changeant les directions des faces verticales et parallèles du mur principal; la section horizontale de ce mur devient alors ABCDE.A'B'C'D'E'. Cependant le bâtiment a, dans les étages supérieurs, la forme qu'il aurait, si le mur n'était pas interrompu; il s'ensuit qu'une partie de ce bâtiment est en saillie par rapport aux murs BC.B'C', CD.C'D', et pour la soutenir, on élève sur ces murs, comme pieds-droits, une voûte dont le plan des naissances est horizontal. Ce plan coupe les faces verticales BC, CD des pieds-droits et la face du mur principal suivant le triangle ECD. On prend pour la surface de la voûte, un cône droit dont le sommet est en C, et qui a pour côtés les droites CB, CD. La face ABDE du mur principal coupe ce cône suivant une ellipse. Ayant divisé cette ellipse en arcs dont les cordes sont égales, et le nombre de ces arcs étant égal à celui des voussoirs, on conçoit par les points de divisions et par l'axe du cône un premier système de plans normaux. Une section circulaire du cône est aussi divisée en autant de parties égales qu'il y a de voussoirs, et un second système de plans normaux au cône passe par ces nouvelles divisions; les plans normaux qui divisent en deux parties égales les angles dièdres formés par les plans des deux premiers systèmes de même rang, comprennent les joints des voussoirs.

Lorsque la face AE du mur principal est en talus, on dit que la trompe est en talus; elle est de plus biaise, lorsque les arêtes de douelles BC, CD du plan des naissances ne sont pas de même longueur. XY étant la trace horizontale d'un plan vertical, perpendiculaire à la droite AE, l'angle AXZ sur ce plan mesure le talus du mur principal.

Le cintre du trompillon est parallèle au plan qui a pour traces horizontale et verticale, les droites EBX, XZ. Le joint du trompillon est une surface réglée dont la droite génératrice, normale au cône de la trompe, passe par une ellipse semblable à celle qui forme le cintre apparent de cette trompe.

La surface conique de la trompe étant seulement assujétie à passer par les droites CB, CD, il y a une infinité de surfaces qui satisfont à cette condition. Les auteurs des anciens traités de coupe de pierres ont varié sur le choix de cette surface. L'idée très-simple d'employer le cône droit à base circulaire, est de M. Girard; alors la surface réglée, joint du trompillon, est engendrée par une droite qui a pour directrice l'axe du cône droit de la trompe.

De la construction de l'épure.

65. On prend pour plans de projection, le plan horizontal des naissances de la trompe, et le plan vertical XY perpendiculaire aux faces du mur principal. On déduit de ces deux projections, tout ce qui est nécessaire pour l'application du trait sur la pierre. Cette application se fait pour le trompillon, par la méthode d'équarrissement, et pour les voussoirs de la trompe, par la méthode des beaux. C'est pourquoi il faut, 1° construire l'intersection de la surface de joint du trompillon par les faces du parallépipède rectangle capable de ce trompillon; 2° résoudre pour chaque voussoir les deux pyramides triangulaires (page 137, art. 8, liv. II), formées chacune par les plans du cintre de la trompe, de l'un des deux joints, et par un troisième plan mené par les deux arêtes de douelles, plan qui contient la *douelle plate*. (La douelle plate est le quadrilatère formé par les deux arêtes de la douelle d'un voussoir et par les droites qui joignent les extrémités de ces arêtes.)

Les deux pyramides ont leurs sommets sur le cintre, aux extrémités des arêtes de douelles; elles ont pour arête commune, la corde du cintre qui joint ces extrémités. Chaque joint contient deux autres arêtes des pyramides, dont l'une est aussi arête de douelle; l'autre est la droite intersection du plan de joint et du plan de tête qui contient le cintre: Ayant construit les angles que les trois arêtes de chaque pyramide font entre elles, on détermine les angles dièdres ou *beaux*, par la méthode exposée (page 139, art. 12).

Trompe sur le coin. N° 2, App., pl. 14.

Définition.

66. Soient AFAT', FE.F'E' les sections horizontales de deux murs d'un bâtiment, qui se rencontreraient à angle droit, s'ils étaient prolongés jusqu'au plan vertical FF', mais qui sont interrompus sur les longueurs BF, DF, côtés du carré BCDF. L'espace qui se projette horizontalement suivant ce carré, doit rester libre sur une hauteur donnée, à partir du niveau supérieur du terrain.

Il est nécessaire, pour satisfaire à cette condition, d'infléchir les murs principaux suivant les côtés BC, DC du carré BCDF; en sorte que la section horizontale des murs du bâtiment devienne ABCDEA'B'CD'E'. Cependant le bâtiment doit conserver dans les étages supérieurs la forme qu'il aurait, si les murs principaux ABA'B', DED'E' n'étaient pas interrompus; il s'ensuit que la partie supérieure du bâtiment, correspondant au carré BCDF, sera en saillie sur les quatre murs terminés par les plans verticaux AB, BC, CD, DE; c'est pour la soutenir qu'on élève sur ces murs, comme pieds-droits, une voûte conique. Le plan horizontal des naissances de cette voûte, coupe les faces extérieures des murs suivant le carré BCDF, dont les côtés CB, CD sont les arêtes de douelles des premiers voussoirs de la trompe dite *sur le coin*. Ayant pris pour la surface de cette trompe le cône droit dont le sommet est en C, et dont le côté CB ou CD fait avec l'axe CF l'angle BCF ou FCD de 45° , le cintre extérieur de la trompe est formé des deux sections du cône par les plans verticaux BF, FD; et parce que ces plans sont parallèles aux plans tangens du cône menés par les droites CB, CD, il s'ensuit (art. 81, liv. 1^{er}, page 48) que le cintre est formé de deux paraboles *Gmb*, *Gnd*, comprises entre les deux droites rectangulaires *Fd*, *FG*, et *Fb*, *FG*, respectivement égales aux droites *ED* et *FH*.

Cette trompe a, comme la première, un trompillon d'une seule pierre, dont le cintre est formé des portions des mêmes paraboles *Gmb*, *Gnd*, qui ont pour projections horizontales les droites *bf*, *df*, respectivement parallèles aux droites *BE*, *DE*.

Les joints, qui divisent la trompe sur le coin en voussoirs, sont aussi, comme pour la précédente n^o 1, dans des plans qu'on détermine, en égalisant autant que possible les épaisseurs des voussoirs; et les cordes des douelles de ces voussoirs sur le cintre apparent.

Construction de l'épure.

67. On prend pour plans de projection, 1^o le plan des naissances de la trompe pour plan horizontal; 2^o les plans verticaux BF et FD, qu'on amène dans le plan vertical *HEH'* perpendiculaire à l'axe CF, en les faisant tourner autour de la verticale *F*, ou *FG*.

On déduit de ces deux projections, 1^o les angles dièdres des douelles plates et du cintre; 2^o les développemens des douelles plates.

On remarquera que la douelle plate de la clef est un quadrilatère, divisé en deux triangles isocèles par l'horizontale *m'n*, qui joint les extrémités des arêtes de douelles passant par les points *m* et *n* des deux paraboles du cintre.

Le plan de cette douelle plate coupe la verticale FG au point g , qu'on détermine en menant la parallèle CL à $m'n'$, et en portant la droite FL dirigée suivant FD en FI; la droite ln prolongée coupe la verticale FG au point g ; ce qui donne les côtés égaux gm , gn du petit triangle isocèle de la douelle plate de la clef.

L'application du trait sur la pierre, tant pour ce trompillon que pour les voussoirs de la trompe, se fait par les procédés indiqués dans la notice sur la trompe précédente N° 1, *App.*, pl. 13.

Trompe cylindrique. N° 3, App., pl. 15.

Définition.

68. Cette trompe est destinée à soutenir un mur en tour ronde, en saillie sur un mur droit. On voit, rue Garancière, église Saint-Sulpice de Paris, une trompe de cette espèce, qui soutient une chapelle circulaire. La section du mur droit par le plan horizontal des naissances de la trompe, est terminée par deux droites parallèles AB, CD. Le même plan couperait la face extérieure du mur en tour ronde prolongée, suivant le cercle du centre E et du rayon EF; il contient l'axe GH de la surface cylindrique de la trompe. Cette surface est un cylindre droit, qui a pour axe la droite GH parallèle à CD; un plan vertical ACG la coupe suivant un cercle du centre G et du rayon GC.

Le cintre apparent de la trompe est une courbe à double courbure, intersection de deux cylindres droits, l'un horizontal, qui termine la trompe, l'autre vertical, qui termine le mur en tour ronde. Cette courbe a pour projection horizontale, l'arc de cercle IFK du rayon EF. Les plans de joints qui divisent la trompe en voussoirs passent par la droite EF perpendiculaire sur le milieu de la corde IK de l'arc IFK, et divisent le demi-cercle vertical du diamètre IK, en un nombre impair d'arcs égaux.

Le trompillon a pour cintre la ligne d'intersection du cylindre droit horizontal de la trompe et du cylindre droit vertical, dont la section horizontale ijk est concentrique à l'arc IFK. Le joint du trompillon est une surface réglée normale à sa douelle; les faces adjacentes sont planes. La projection horizontale du trompillon est comprise entre les droites il , km , parallèles à la droite EF; il a pour section par le plan vertical AB, le rectangle $lmno$.

Construction de l'épure.

69. Ayant pris pour plan horizontal, celui des naissances de la trompe cylindrique, et pour plan vertical la face verticale AB du mur droit, on y projette, 1° les cintres de la trompe et du trompillon; 2° les arêtes de douelles de la trompe.

On déduit de ces deux projections, 1° les intersections du joint du trompillon, par les faces horizontales et verticales de ce trompillon; 2° le développement des douelles des voussoirs de la trompe; 3° le développement des joints plans de ces voussoirs, en observant que chacun de ces plans coupe le cylindre droit vertical du mur en tour ronde, le cylindre droit horizontal de la trompe, et la surface réglée du joint du trompillon : ce qui donne trois courbes planes, pour le contour d'un joint; les autres lignes de ce contour sont trois droites qui appartiennent respectivement à la face horizontale *no* du trompillon, à la face verticale AB du mur droit, et à la face verticale du parement de chaque voussoir.

N° 4. *Trompe sphérique, en niche.*

Définition.

70. Cette trompe couvre un espace circulaire, pris dans l'épaisseur d'un mur en tour ronde. Le plan horizontal des naissances de cette trompe coupe les faces extérieure et intérieure du mur en tour ronde, dont le centre est en O, suivant les cercles concentriques ABC, A'B'C', et la surface sphérique de la trompe suivant le grand cercle FEG du rayon DE; d'où il suit que la section horizontale de la niche est comprise entre les deux arcs de cercles FEG, FB'G, qui se coupent aux points E et G. On mène la droite FG, qui joint ces deux points, et on décrit sur cette droite, comme diamètre, un demi-cercle vertical qu'on divise en un nombre impair de parties égales : les plans menés par les points de division et par la droite BDO, qui joint les centres O et D des arcs FB'G, FEG, divisent la trompe en voussoirs.

Le cintre extérieur de la trompe est une courbe à double courbure, intersection de la portion du cylindre droit vertical, qui passe par l'arc FB'G, et de la sphère du rayon DE, dont le centre est D. Le trompillon a pour cintre un cercle vertical d'un diamètre fg , parallèle à la droite FG. Le joint du trompillon et des voussoirs de la trompe, est un cône droit, dont le sommet est en D, et qui a pour base le cintre ($fg f'g'$).

Les joints des voussoirs de la trompe, qui passent tous par l'horizontale DBd, ont pour traces sur le plan vertical XY, des droites qui divisent en parties égales le cercle $f'g'$; deux de ces droites, telles que $d'5$, $d'6$, sont les limites de la projection verticale de l'un des voussoirs.

La douelle de ce vousoir est une portion de surface sphérique dont le contour est formé, 1° d'un arc vertical 3'4' du petit cercle $f'g'$, centre du trompillon; 2° de deux arcs de grands cercles, dont les prolongemens passeraient par le point E du plan horizontal; 3° d'une portion de la courbe à double courbure, intersection de la douelle sphérique et du cylindre vertical FB'G. Ce contour a pour projections horizontale et verticale, les quadrilatères (1.2.3.4.), (1'.2'.3'.4').

Construction de l'épure et application du trait sur la pierre.

71. Les plans de projection sont, 1° le plan horizontal des naissances de la trompe sphérique; 2° deux plans verticaux XY, X'Y', l'un perpendiculaire et l'autre parallèle à la droite ODBB', du plan des naissances, qui passe par l'axe vertical O du mur en tour ronde, et par le centre D de la surface sphérique de la trompe.

Ayant pris pour le solide capable du trompillon, le parallélépipède (*lunn*, *l'm'n'h*, LMNII), on construit les intersections du joint conique de ce trompillon, par les faces du parallélépipède.

L'application du trait sur la pierre capable d'un vousoir, se fait au moyen des deux joints développés de ce vousoir et du contour de la tête sur le cylindre vertical FB'G. En développant ce cylindre, on a pour la tête du vousoir compris entre les joints $d'.5$, $d'.6$, la figure *a*, dans laquelle la courbe 1.2 est le développement de la portion de courbe à double courbure, qui se projette horizontalement en 1.2.

Pour développer les joints, on suppose que les plans qui les contiennent tournent autour de la droite horizontale BB', pour s'appliquer sur le plan horizontal.

Le premier joint (BB', $d'.3'.5$), développé *fig. j*, a pour contour une figure composée 1° d'un arc de grand cercle de la surface sphérique de la trompe; 2° d'une droite du joint du trompillon; 3° de deux ellipses, intersections des cylindres verticaux du mur en tour ronde par le plan de joint; 4° d'une horizontale du parement vertical, parallèle à la droite BB'.

Le contour du second joint (BB', $d'.4'.6$), développé *fig. j'*, diffère du contour précédent, parce que le plan de ce joint ne rencontre pas seulement le joint conique du trompillon, mais encore la face horizontale supérieure (*lunn*, *m'n'*) de ce trompillon. À la place d'une droite unique *gp* (*fig. j*) du premier contour, on a (*fig. j'*) les deux droites *gq*, *qr*, qui appartiennent, l'une au joint conique du trompillon, et l'autre à la face horizontale supérieure de ce trompillon.

§ V. ESCALIERS. (N^o 1-2-3-4, *App.*, pl. 17-20.)

72. La partie d'un bâtiment ou d'un édifice, occupée par un escalier, se nomme la *cage* de cet escalier. On distingue deux espèces d'escaliers, les uns à *marches parallèles*, les autres à *marches tournantes*. Les premiers conviennent aux grands édifices, dont ils sont le principal ornement; leurs marches sont égales en hauteur et largeur: le rapport de ces deux dimensions est ordinairement celui de 1 à 2. On pose les marches sur un massif rampant, de manière que les deux faces apparentes de chacune d'elles, qu'on appelle, en charpente, *marche* et *contre-marche*, soient l'une horizontale et l'autre verticale. Le massif est contenu par les murs de la cage et par d'autres murs parallèles, distans des premiers de la longueur des marches. La construction de ces murs; et le tracé des marches parallèles, ne présentent aucune difficulté de stéréotomie. Il n'en est pas de même des escaliers à marches tournantes, dont les emplacements sont le plus souvent très-irréguliers, mal éclairés, et qui ne deviennent praticables que par des combinaisons de lignes et de surfaces qui se raccordent.

Les escaliers à marches tournantes sont ou à noyau plein ou à jour. Nous allons donner des exemples de ces deux variétés.

Escaliers à noyau plein. N^o 1 et 1 bis, *App.*, pl. 17.

73. Ces deux escaliers se construisent dans les tours; le noyau est un cylindre vertical à base circulaire du rayon AB (*fig. 1, App.*, pl. 17). L'enceinte de la cage est un mur en tour ronde, qui a pour épaisseur DD', différence des deux rayons AD' et AD. Soit J.F la distance à laquelle on se tient de la face intérieure 1.2.3.4.... du mur en tour ronde, pour s'appuyer commodément sur une rampe fixée contre ce mur. On décrit du point A, comme centre, avec le rayon donné AF, un cercle qu'on divise en arcs égaux, tels que FE'. La corde de ces arcs ne peut pas être moindre que la longueur du pied. Les hauteurs des marches et leurs largeurs, mesurées sur le cercle du rayon AF, sont constantes; les rayons AF, AF',... menés par les points de division, sont les projections des arêtes horizontales des marches. Ces arêtes coupent le cylindre vertical, qui a pour base le cercle du rayon A1, en des points d'une hélice, dont le pas (p. 156, art. 36) est déterminé par le rapport de la largeur d'une marche et de sa hauteur; d'où il suit que ces mêmes arêtes appartiennent à une surface réglée, dont la génératrice,

constamment horizontale, a pour directrices la verticale A, axe du noyau, et l'hélice dont la projection horizontale est le cercle 1.2.3.4...

En développant le cylindre vertical qui a ce cercle pour base, sur le plan vertical XY (fig. 2), perpendiculaire à la droite A3 (fig. 1), l'hélice directrice de la surface réglée des marches devient une droite lm , dont l'inclinaison, à l'égard de l'horizontale XY, est déterminée par le rapport de la largeur mn d'une marche, mesurée sur le cercle 1.2.3.4..., et de sa hauteur ln . On aurait pu terminer le dessous des marches par une surface continue, égale à celle qui passerait par les arêtes supérieures de ces marches, et qui serait coupée par le cylindre vertical 1.2.3.4 (fig. 1), suivant une hélice qui aurait pour développement (fig. 2) une droite $l'm'$ parallèle à lm . On a simplifié la construction de chaque marche, en supposant que sa section par le cylindre vertical, 1.2.3.4, est sur le développement (fig. 2) le polygone $abcde$. Le côté ab de ce polygone est égal à la hauteur d'une marche; le côté bc mesure la quantité dont une marche avance sur l'autre; ad est la somme de cette quantité et de la largeur de la marche mesurée sur le cercle 1.2.3.4; le côté ed est une verticale parallèle à ab , dont la hauteur est donnée.

Enveloppant le cylindre vertical 1.2.3.4 par ce polygone, le côté ce devient une portion d'hélice, et la face courbe de la marche qui passe par cette hélice, est engendrée par une droite horizontale qui s'appuie sur l'axe vertical A (fig. 1). Le cylindre vertical du noyau, qui a pour base le cercle du rayon AB, coupe la marche suivant une figure qui devient sur le développement (fig. 3), un polygone $abcde$, du même nombre de côtés que le polygone donné de la fig. 2, et marqué des mêmes lettres.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que la partie de chaque marche comprise entre le noyau et le mur en tout ronde de la cage; mais cette marche a un noyau, qui fait partie du noyau plein de l'escalier, et qui est compris entre les deux plans horizontaux ad , bc (fig. 2 et 3). C'est pourquoi le développement (fig. 3) de la marche comprend le parallélogramme $aa'cd$ (qui se prolonge au-delà du cadre de la planche), dont le côté aa' , ou cc' est égal à la circonférence du rayon AB (fig. 1). La projection horizontale de cette marche $EE'B'3'E$, est marquée (fig. 1) d'un trait plein. Toutes les marches étant égales, elles ont des projections ou des sections égales, sur chacun des trois plans; fig. 1, 2, 3.

Les marches font plusieurs révolutions autour du noyau. Une figure telle que $EE'B'3'$, est la projection horizontale de toutes les marches, dont les arêtes horizontales sont dans le même plan vertical 3.3'. La distance verticale de deux de ces marches doit être d'environ deux mètres, pour qu'en montant l'escalier, on ne soit point obligé de s'incliner. Si la cage entière conti-

prend vingt marches pour une révolution (ce qui a lieu sur la *fig. 1*), chaque marche aura en hauteur un décimètre. En montant l'escalier, on voit le dessous des marches d'une révolution supérieure, et on aperçoit la discontinuité qui résulte d'un système de faces courbes hélicoïdes, adjacentes à de petites faces planes verticales. C'est pour éviter cette apparence, qu'on a construit (N^o 1 *bis*, *App.*, pl. 17) l'escalier circulaire à noyau plein, en terminant le dessous des marches par une surface réglée continue.

Explication des figures 1, 2, 3. N^o 1 bis, App., pl. 17.

74. Le noyau, la cage, les arêtes horizontales des marches étant les mêmes que sous la figure N^o 1, on conçoit la surface continue qui passe par ces arêtes, et dont la section cylindrique développée (*fig. 2*) est la droite *lm*. Ayant mené sur ce développement une parallèle *l'm'* à cette droite, on plie la *fig. 2* sur le cylindre vertical 1.2.3.4, et la droite *l'm'* devient une hélice directrice de la surface du dessous des marches. Le mouvement de la génératrice de cette surface est déterminé par deux autres conditions, d'être constamment horizontale, et tangente à la surface extérieure du noyau plein.

On donne (*fig. 2*), 1^o la hauteur *ab* d'une marche; 2^o la quantité *pb* dont une marche avance sur l'inférieure; 3^o la longueur d'une verticale *cpk* comprise entre les deux parallèles *lm*, *l'm'*; ce qui détermine sur la droite *l'm'*, le point *e*, et la distance *ep* de ce point à l'horizontale *bp*.

La droite de la surface du dessous des marches, qui passe par le point *c* (*fig. 2*), est, en projection horizontale (*fig. 1*), une tangente *CC'* au cercle du rayon *AB*. Cette droite est une arête de douelle de la voûte dont la marche est un voussoir. On prend pour le joint de ce voussoir, un plan passant par l'arête de douelle, et normal à la douelle au point milieu de l'arête. Ce joint coupe le plan horizontal *bp* (*fig. 2*), suivant une horizontale qui passe par le point *y*, et le cylindre vertical 1.2.3.4, suivant une portion d'ellipse dont la transformée est (*fig. 2*) la courbe *cy*.

Le second joint de la marche doit être égal au premier : c'est pourquoi il faut que la seconde arête de douelle de cette marche passe par le point *e'* (*fig. 2*), distant de l'horizontale *adp'* de la hauteur verticale *e'p' = ep*; ce qui détermine le point *e'* de la droite *l'm'*, et les projections horizontales (*EE'* (*fig. 1*), *EE'd'd'*) de la seconde arête de douelle, et d'un joint passant par cette arête. La droite *EE'* est tangente au cercle du rayon *AB*, puisqu'elle est la projection d'une droite de la surface inférieure des marches.

La section entière de la marche développée (*fig. 2*), est formée de quatre droites *ab*, *by*, *ce'*, *da*, et de deux courbes égales *cy*, *e'd*. Développant le cylin-

dre du noyau plein (fig. 3), le contour de la section de la marche par ce cylindre est *abyce'd*; il est aussi formé de quatre droites et de deux courbes égales *cy, c'd*. Les verticales marquées des mêmes lettres (fig. 2 et 3) sont de même longueur.

Chaque marche de l'escalier N° 1 *bis* porte, comme la marche de l'escalier N° 1, une assise du noyau, dont la hauteur est déterminée par la distance verticale des points *a* et *c* (fig. 3); c'est pourquoi il faut ajouter au développement du noyau (fig. 3), le parallélogramme (prolongé au-delà du cadre de la planche) *aa'b'c'*, qui a pour côtés la droite *ab' = cq* (fig. 2), et la droite *aa'* égale à la circonférence du rayon *AB* (fig. 1) du noyau.

Les marches des deux escaliers N° 1 et 1 *bis*, étant engagées dans l'épaisseur du mur de cage, elles sont soutenues d'un bout par ce mur, et de l'autre par le noyau plein dont elles font partie.

Escaliers à jour, N° 2 et 3, App., pl. 18 et 19.

Fis à jour, N° 2, App., pl. 18.

Définition.

75. La *vis à jour* est un escalier composé de marches qui s'appuient seulement par une extrémité sur l'un des murs de la cage. Ces marches forment une voûte; elles sont terminées en dessous par une surface réglée : chaque marche est un vousoir, qui a pour double une portion de cette surface.

Les murs de cage étant *droits*, les intersections des faces intérieures de ces murs, par un plan horizontal, forment un polygone; on trace une courbe tangente aux côtés de ce polygone, et on se sert de cette courbe pour diviser la cage de l'escalier en deux parties, destinées l'une pour les marches, et l'autre pour le *jour*. L'emplacement qu'on appelle *jour* est terminé par une surface cylindrique verticale, qui a pour base une courbe équidistante de celle qui est tangente aux côtés du polygone de la cage. Les marches occupent l'espace compris entre le *jour* et les murs de la cage. Dans les deux exemples précédents, N° 1 et 1 *bis*, *App.*, pl. 17, la cage et le jour sont terminés par des surfaces cylindriques verticales, qui ont pour bases des cercles concentriques.

La face horizontale de chaque marche porte à l'une de ses extrémités (celle qui est du côté du jour), un balustre vertical qui supporte une rampe. La distance à laquelle on se tient de cette rampe en montant l'escalier, étant donnée, on s'en sert pour tracer sur le plan de la section horizontale du jour, une courbe équidistante du contour de cette section. De chaque point de ce contour comme centre, avec la distance donnée pour rayon, on décrit un

arc de cercle, et la ligne tangente à tous les arcs de cercle ainsi décrits, termine la courbe équidistante, sur laquelle on mesure la largeur des marches. Cette courbe étant divisée en arcs de même longueur, ou même par les points de division, des droites que l'on considère comme les projections horizontales des arêtes horizontales des marches, ou des intersections des plans des faces de ces marches, faces dites en charpente *marche* et *contre-marche*. La condition de passer par les points de division de la courbe équidistante du jour, ne détermine pas les projections de ces arêtes; ce n'est que par un tâtonnement qu'on parvient à fixer la position la plus convenable de ces droites. Ce tâtonnement, qu'on appelle *balancement* des marches, a pour objet de donner à ces marches des dimensions à peu près égales, et d'éviter des changemens brusques de courbure, soit dans la surface du dessous des marches, ou sur les lignes apparentes de cette surface.

On est dirigé dans cette opération, plus mécanique que géométrique, par la considération que les projections horizontales des arêtes des marches, doivent diviser le contour de la section horizontale du jour, en parties qui augmentent et diminuent progressivement par degrés insensibles, sur deux portions consécutives de ce contour.

Explication des figures 1, 2, 3, App. pl. 18. Escalier N° 2 (Vis à jour).

76. Soient (fig. 1) $abc...h$ et $1.2.3.4...8$, les lignes du plan horizontal, qui représentent le jour de l'escalier et la ligne qu'on suit en montant cet escalier. On divise cette dernière ligne en parties égales $1.2, 2.3, ..., 7.8$.

L'opération du balancement détermine les droites $1.a, 2.b, 3.c, ..., 8.h$, qui sont les projections horizontales des arêtes des marches. Ces droites prolongées forment un polygone, limite d'une courbe continue $ab\gamma...w$, tangente aux côtés de ce polygone. Ayant tracé cette courbe, la surface du dessous des marches est déterminée.

De la surface du dessous des marches.

77. Le cylindre vertical qui a pour base la courbe $1.2.3...$ (fig. 1), coupe les arêtes horizontales des marches en des points, qui appartiennent évidemment à une hélice, puisque les hauteurs verticales des marches sont égales. On prend cette hélice pour la directrice d'une surface réglée dont la génératrice, constamment horizontale, se meut en touchant le cylindre vertical qui a pour base la courbe $ab\gamma...w$, et pour déduire de cette surface, celle qui termine le dessous des marches, on suppose que les droites génératrices des deux

surfaces, sont pour chaque position, parallèles entre elles dans le même plan vertical, et que leur distance verticale ne change pas.

Il résulte de cette hypothèse, 1° que tout plan vertical passant par l'une des droites $a.1, b.2, c.3, \dots$, contient l'arête horizontale de la marche dont cette droite est la projection, et une génératrice de la surface du dessous des marches; 2° que la distance verticale de l'arête et de la génératrice est constante.

Construction d'une marche (fig. 1, 2 et 3).

78. Soient 1.2, 2.3 (*fig. 1*), les largeurs des deux marches consécutives. La marche supérieure recouvre une partie de la marche inférieure, et ce recouvrement étant donné, nous supposons que sa largeur, mesurée sur la ligne 1.2.3..., soit égale à R.2 ou R'.3. On mène par les points R, R' les tangentes Rr, R'r', à la courbe $ab\gamma\dots\alpha$, et ces droites sont les projections horizontales des arêtes de douelle de la marche. La plus courte distance de ces deux arêtes est égale en longueur, à la hauteur d'une marche.

Les marches étant comprises entre la cage LMNO et le jour $abc\dots h$, les projections horizontales des arêtes de douelles ont les mêmes limites. Ayant divisé ces projections en deux parties égales aux points m et m' , on conçoit par les points correspondans des arêtes, des normales aux douelles; chaque arête de douelle et sa normale déterminent un plan de joint de la marche. La distance de l'arête de douelle à la face horizontale de la marche supérieure ou inférieure étant connue, on en déduit les parallèles St, S't' aux droites Rr, R'r', qui terminent les projections horizontales des joints.

De la normale à la surface du dessous des marches.

79. Les arêtes de douelles sont tangentes au cylindre vertical qui a pour base la courbe $ab\gamma\dots\alpha$, et passent l'une par l'arête verticale α , l'autre par l'arête verticale β . On substitue aux élémens de la surface du dessous des marches, et suivant ces arêtes, des paraboloides tangens, qui ont pour génératrices une droite horizontale, dont le mouvement est déterminé par la condition de passer par l'hélice 1.2.3...8 et par l'une des verticales α, β . Les normales à ces paraboloides, ou les perpendiculaires aux plans tangens qu'on a déterminés (art. 152, liv. I^{er}), fixent la position des plans de joints de la marche.

De l'application du trait sur la pierre.

80. Chaque marche est engagée dans l'épaisseur du mur de cage, et en considérant celle dont la projection horizontale (*fig. 1*) est $a'pq$, et qui se termine au plan vertical pq , parallèle à la face verticale $MNPQ$ du mur de cage, on construira (*fig. 2*) l'intersection de cette marche par le plan pq . On connaît dans cette figure la hauteur $2.2'$ de la marche, la distance Rr ou $R'r'$ de l'arête de donelle au plan horizontal $s.2$ ou $2'.3'$, et la différence $R'k$ des horizontales menées par les points R, R' , laquelle est égale à la hauteur $2.2'$ d'une marche.

On ajoutera à la section plane (*fig. 2*) de la marche, le développement (*fig. 3*) du cylindre vertical $abc...h$ (*fig. 1*). Ayant d'abord exécuté le solide dont la projection horizontale est égale à celle de la marche, et qui est compris entre deux plans horizontaux distans entre eux de la quantité kr' (*fig. 2*), on passera de ce solide à la forme de la marche, au moyen des deux panneaux (*fig. 2 et 3*).

Escalier à jour N° 3; App., pl. 19. — Courbe rampante.

81. Les marches en pierre d'une vis à jour, dont les extrémités sont engagées dans l'épaisseur du mur de cage, n'ont de points d'appui que sur ce mur; quoiqu'elles y soient fixées par des barres de fer qui les traversent, elles ne peuvent supporter que de faibles pressions, et on doit éviter l'emploi de cet escalier pour transporter de lourds fardeaux. Le poids d'une charge tend à rompre la marche qui la supporte vers l'extrémité engagée dans le mur; et l'effort est d'autant plus grand, que la ligne qu'on suit en montant l'escalier est plus éloignée du mur de cage, ou moins éloignée du jour. On pourrait augmenter la résistance, en diminuant la longueur de la marche; mais ce moyen n'est praticable que lorsque l'espace occupé par la charge, ou le nombre de personnes qui montent l'escalier de front, n'est pas déterminé. Une autre espèce d'escaliers à jour, capables de supporter de grandes pressions et même des chocs, se compose de marches comprises entre le mur de cage et une voûte particulière qu'on nomme *courbe rampante*.

Définition de la courbe rampante, App., pl. 19.

82. Les murs de la cage étant donnés, on détermine, comme pour la vis à jour (Escalier N° 2, *App.*, pl. 18), 1° la ligne $abcd...h$ du jour, équidistante de la courbe tangente aux côtés LM, MN, NO du polygone formé par la section horizontale des murs de la cage; 2° la projection horizontale 1.2.3...8 de la ligne qu'on suit en montant l'escalier; 3° la courbe $a\beta\gamma...u$, qu'on obtient par l'opération du *balancement* (art. 74, p. 311), courbe à laquelle les projections des arêtes horizontales des marches, 1.a, 2.b, 3.c, 4.d... 8.h, sont tangentes; 4° la surface continue des arêtes horizontales des marches, engendrée par une droite horizontale dont le mouvement est déterminé par ces deux conditions, de passer par l'hélice dont la projection horizontale est la ligne 1.2.3...8, et d'être tangente au cylindre vertical, qui a pour base la courbe $a\beta\gamma...u$.

Cela posé, la courbe rampante est un solide compris entre deux cylindres verticaux, qui ont pour bases la ligne du jour $abcd...h$, et une ligne équidistante de celle-ci, $a'd'...h'$; les faces supérieure et inférieure de ce solide, appartiennent à des surfaces réglées, dont la génération se déduit de celle de la surface continue qui est le lieu géométrique des arêtes horizontales des marches.

Des surfaces supérieure et inférieure de la courbe rampante.

83. Un plan vertical quelconque, tangent au cylindre vertical qui a pour base la courbe $a\beta\gamma...u$, contient une horizontale de la surface continue des arêtes des marches, et deux autres horizontales parallèles, dont l'une appartient à la surface supérieure de la courbe rampante, et l'autre à la surface inférieure. Les distances respectives de ces trois horizontales étant données, les surfaces réglées qui sont les lieux géométriques de ces droites, sont déterminées. Chacune d'elles a pour directrice, une hélice tracée sur le cylindre vertical 1.2.3...8, et sa génératrice mobile est tangente au cylindre vertical $a\beta\gamma...u$.

- *De la surface moyenne de la courbe rampante.*

84. Un plan vertical quelconque, tangent au cylindre vertical $a\beta\gamma...u$, contient les deux droites horizontales et équidistantes des surfaces supérieure et inférieure de la courbe rampante; une troisième droite horizontale, à égale distance des deux premières, appartient à la surface moyenne de la courbe rampante.

Le cylindre vertical dont la base A...D...H est équidistante des lignes a...d...h, a'...d'...h', et qui divise en deux parties égales l'espace compris entre les deux cylindres verticaux qui ont ces lignes pour bases, coupe la surface moyenne de la courbe rampante, suivant une ligne qu'on appelle *la ligne moyenne de ce solide*; les plans de joint des voussoirs de la courbe rampante, passent par des points déterminés de cette ligne, et sont normaux à la surface moyenne.

Des joints de la courbe rampante.

85. La grandeur des voussoirs de la courbe rampante est déterminée par les dimensions des pierres destinées à la construction de ces solides. Ces dimensions étant connues, on divise en plusieurs parties la ligne moyenne de la courbe rampante, dont la projection horizontale est A...D...H, et on suppose que les joints de l'un des voussoirs doivent passer par les points de cette ligne moyenne, qui se projettent horizontalement en E et en F.

Chacun de ces joints est déterminé par deux conditions, la première d'être normal à la surface moyenne, la seconde de passer par une droite de cette surface. Ayant mené les droites E₁F₁, tangentes à la courbe a₁b₁..., aux points α , β , ces tangentes seront les projections des droites de la surface moyenne, par lesquelles on doit mener les plans de joint.

La seconde tangente F₁ β prolongée, coupe la ligne 1.2.3...8 au point ϕ : considérant cette ligne comme la projection d'une hélice de la surface moyenne, la tangente à cette hélice au point dont ϕ est la projection horizontale, et la verticale passant par le point de contact β , sont les deux directrices d'un paraboloïde qui sera tangent à la surface moyenne, en supposant que ces deux surfaces aient pour génératrice mobile, une droite horizontale: or l'on sait (art. 152, liv. I^{re}) mener une normale à ce paraboloïde; donc les deux droites qui déterminent le joint passant par le point de la surface moyenne, dont F est la projection horizontale, sont connues. Le second joint, passant par le point dont E est la projection horizontale, se construira de la même manière.

Construction de l'épure, App., pl. 19.

86. Le premier plan de projection (fig. 1) étant parallèle aux faces horizontales des marches de l'escalier, on prend deux autres plans (fig. 2 et 3) de projections verticales, respectivement perpendiculaires aux droites horizontales βF_1 , αE_1 , et par conséquent aux plans de joint. Soit xy (fig. 2) la trace horizontale du premier plan vertical, le plan de joint y sera projeté suivant la droite pq. On projette sur ce même plan les quatre arêtes de la courbe

rampante, ou les lignes d'intersections des quatre surfaces courbes qui terminent ce solide; on ajoute aux projections verticales (*fig. 2 et 3*) de ces arêtes, celles des lignes de la surface supérieure et inférieure de la courbe rampante, qui se projettent sur le plan horizontal en AEDFHI. Ces projections (*fig. 2*) sont coupées par la droite *pq* en des points qui ont leurs correspondans sur la *fig. 1*; d'où il suit que les projections du contour du premier joint sont déterminées sur les *fig. 1 et 2*.

On déterminera de la même manière (*fig. 1 et 3*) les projections du contour du joint, dont le plan passe par le point (E, e) de la surface moyenne. Ayant (*fig. 1*) la projection horizontale du voussoir entier, on connaît les faces verticales XY, Z d'un parallélépipède capable du voussoir. Pour déterminer les faces inclinées de ce parallélépipède, on emploie un troisième plan vertical X'Y' (*fig. 4*), parallèle à la droite XY (*fig. 1*), et on projette le voussoir entier sur ce plan. Cette projection (*fig. 4*) du voussoir est la limite des parallèles RS, TV, projections verticales des faces inclinées du parallélépipède.

Application du trait sur la pierre.

87. Cette application a pour objet de donner au parallélépipède (XYZ, RSTV), *fig. 1 et 4*, la forme du voussoir de la courbe rampante.

Les cylindres verticaux *a...d...h*, *a'...d'...h'* (*fig. 1*), qui comprennent la courbe rampante, sont coupés par les faces inclinées RS, TV (*fig. 4*) du parallélépipède, suivant des courbes; on développe en K' (*fig. 5*) ces courbes, et on y ajoute les droites, intersections des plans de joint et des faces inclinées RS, TV (*fig. 4*).

Les joints (*pq*, *fig. 2*), (*p'q'*, *fig. 3*) doivent aussi être développés, et les figures K, K' montrent ces joints dans leur véritable grandeur. Le contour de chacun de ces joints est formé de quatre courbes, intersections de ce joint et des quatre surfaces de la courbe rampante. On a ajouté à ce contour le parallélogramme qui résulte de l'intersection du plan de joint et du parallélépipède capable du voussoir.

Les lignes d'intersection du joint et des faces cylindriques du voussoir, sont prolongées jusqu'aux côtés du parallélogramme.

Au moyen des trois panneaux K, K', K'' (*fig. 2, 3, 5*), on substituera d'abord aux faces planes verticales XY, Z (*fig. 1*) du parallélépipède, les portions de surfaces cylindriques, qui comprennent la courbe rampante, et ensuite on tracera sur le solide ainsi modifié, le contour du voussoir de la courbe rampante, dont on a les projections (*fig. 1 et 4*).

La courbe rampante, considérée comme une voûte, a pour pied-droit le sol,

et on la soutient dans sa partie supérieure par des pilastres ou colonnes. Les marches de l'escalier, placées entre cette courbe rampante et les murs d'enceinte de la cage, y sont engagées par leurs extrémités, et deviennent, par la résistance de ces points d'appui, capables de supporter de grandes pressions. Dans le cas où les marches devraient être terminées par une surface de même genre que celle qui forme la face supérieure ou inférieure de la courbe rampante, on traiterait chacune de ces marches comme si elle appartenait à une vis à jour N° 2, *App.*, pl. 18.

Les deux premiers escaliers N° 1 et 1 *bis*, *App.*, pl. 17, se construisent seulement en pierre : il n'en est pas de même des escaliers à jour N° 2 et 3, *App.*, pl. 18 et 19 ; on les exécute plus souvent en bois qu'en pierre. La construction en bois n'apporte que de légères modifications dans la forme des marches de la vis à jour et des voussoirs de la courbe rampante.

Escalier N° 4, App., pl. 20, in-folio. — Vis Saint-Gilles.

88. La vis Saint-Gilles est une voûte destinée à supporter les marches d'un escalier tournant. Elle a pour pieds-droits, 1° un noyau plein de la forme d'un cylindre droit à base circulaire ; 2° un mur en tour ronde de même axe que le noyau. L'espace compris entre la face extérieure du noyau plein, et la face intérieure du mur en tour ronde, forme la cage de l'escalier.

Soit (*fig. 1, App.*, pl. 20) un plan vertical passant par l'axe Al du noyau plein, dont la trace horizontale $A\phi$ contient le rayon AB de ce noyau, et la largeur BC de la cage. Sur BC comme diamètre, on décrit le demi-cercle $BCDE$, qu'on divise en arcs égaux CF , FE , ..., DB , de nombre impair. Ayant achevé les deux figures $ABDl$ et $CDEF\phi HKG\alpha L$, il faut concevoir les surfaces *héliçoïdes* (note II, page 289) qui ont pour génératrices, les lignes mobiles BD , DL de la première figure, toutes les lignes droites ou circulaires de la seconde, et pour axe commun la verticale Al . Le mouvement se fait dans le sens indiqué par la flèche sur le plan horizontal (*fig. 2*).

L'horizontale BC (*fig. 1*) engendrera la surface des naissances de la voûte, et le demi-cercle $BCDEF$ engendrera la surface de la voûte. Le solide engendré par la figure triangulaire BDL , fait partie du noyau plein, et se décompose, comme ce noyau, par tranches horizontales. La section horizontale (*fig. 2*) de ce noyau et du solide héliçoïde a pour contour, 1° la circonférence du rayon AB , moins l'arc $B'L'$; 2° les deux courbes $B'D'$, $D'L'$ intersections du plan horizontal et des surfaces héliçoïdes engendrées par l'arc BD et par la droite DL . La voûte se compose de solides héliçoïdes qui ont pour génératrices des figures de cinq côtés tels que EMF , EG , FH , GK , HK . Ce dernier côté en-

gendre un cylindre droit; les autres côtés engendrent des surfaces hélicoïdes. Chaque solide hélicoïde se décompose en voussoirs par des plans de joint perpendiculaires à l'hélice décrite par le milieu M de l'arc de cercle EMF. Cette hélice a pour projection horizontale le cercle $NN'n''$, décrit (fig. 2) du point A comme centre avec le rayon AN; on la nomme *hélice moyenne*.

Soit AN' (fig. 2) le rayon de ce cercle, perpendiculaire à l'horizontale AC. On projette chaque voussoir de la voûte sur un plan vertical (fig. 3), perpendiculaire à ce rayon; la tangente à l'hélice moyenne au point (N', μ) , y étant projetée parallèlement, le plan de joint perpendiculaire à cette tangente, y est représenté par sa trace μJ . On projette sur le plan horizontal le contour du joint N° 1, et on remarque que, quel que soit le point de l'hélice moyenne par lequel on mène un autre plan de joint normal à cette hélice, le contour du joint et sa projection horizontale ne changent pas. C'est pourquoi l'on a transporté la projection du joint N° 1, sur les projections N° 2 et 3, en ayant soin que les contours de ces trois projections soient respectivement placés de la même manière, par rapport aux droites AN', An', An''.

Ayant les projections horizontales (fig. 2) des joints extrêmes d'un voussoir de la voûte, on connaît les dimensions d'un parallépipède rectangle, capable de ce voussoir, et dont les faces sont parallèles ou perpendiculaires au plan vertical (fig. 3); on développe (fig. 4) les faces de ce solide qui lui sont perpendiculaires, et on trace sur ce développement les intersections des plans de ces faces et des cylindres droits engendrés par les côtés verticaux gh, Kk (fig. 1) du rectangle $ghKk$ circonscrit à la figure EMFGHK. Enfin on développe (fig. 5) le joint perpendiculaire à l'hélice moyenne, qui a pour trace (fig. 3) la droite μJ . On rapporte sur ce développement (fig. 5), 1° les droites, intersections des plans de joints du voussoir et des faces du parallépipède capable de ce voussoir; 2° les courbes intersections des mêmes plans et des deux solides hélicoïdes, qui ont pour génératrices le rectangle $ghKk$, et la figure EMFGHK (fig. 1).

Au moyen des figures 1, 2, 3, 4, 5, on donne au parallépipède capable d'un voussoir, la figure de ce voussoir, déterminée par les projections sur les plans figures 2 et 3.

89. En considérant l'un des voussoirs, dont la tête est visible, et qui a sa naissance sur un plan vertical ACI (fig. 1), ou sur tout autre plan vertical An' (fig. 2), ce dernier plan An' coupe le parallépipède capable du voussoir, suivant un parallélogramme qu'on a rapporté en $ab\gamma\delta$ (fig. 1), tel qu'il doit être placé sur la figure EFHK, considérée comme la section du voussoir par le même plan An' (fig. 2).

Du tracé des épures à l'usage des appareilleurs.

90. Les appareilleurs tracent les épures de coupe des pierres sur deux plans, l'un horizontal et l'autre vertical. Les dimensions parallèles à ces plans y sont représentées dans leur grandeur naturelle. Les aires sur lesquelles on trace ces épures doivent être parfaitement dressées. On obtient facilement des surfaces lisses et planes, au moyen du plâtre gâché, qu'on emploie dans un état de mollesse, et qui prend, au bout de quelques minutes, la dureté convenable. Le tracé des lignes droites sur les aires, ou plans de projection, se fait au moyen d'un cordeau qu'on tend par les deux bouts. Une pointe dirigée suivant le cordeau, forme l'empreinte d'une ligne droite; autrement on frotte le cordeau avec de la pierre tendre, et en le cinglant dans un plan perpendiculaire à l'aire, on y trace une droite de la couleur de la pierre.

91. Nous n'avons considéré dans l'appendice qui précède, que la partie géométrique de l'appareil des ouvrages de pierres. Si l'on veut connaître les dimensions des voûtes, les rapports de grandeurs entre les parties qui les composent, on consultera les livres qui traitent spécialement de l'art de bâtir, et notamment ceux du savant M. Rondelet, architecte du Panthéon. Nous terminerons cet appendice par un article qui est extrait de son *Traité théorique et pratique de l'Art de bâtir*, tome 3, page 81.

Sur les qualités les plus essentielles des pierres relativement à leur emploi dans la construction des édifices.

92. M. Rondelet a fait, sur cent quarante-cinq espèces de pierres, plus de huit cents expériences, d'où il a tiré les conclusions suivantes :

1° Dans toutes sortes de pierres, la pesanteur, la force, la dureté, la nature du grain, la contexture plus ou moins serrée, sont des qualités qui semblent se déduire les unes des autres. Ainsi, dans les pierres de même espèce, les plus pesantes sont ordinairement les plus fortes, les plus dures, celles dont le grain est plus fin, la texture la plus compacte.

2° Les pierres dont la couleur tire sur le noir ou le bleu, sont plus dures que les grises, et celles-ci que les blanches ou rousses; et en général celles qui ont les couleurs les plus claires, sont ordinairement moins fortes et moins pesantes.

3° Les pierres dont le grain est homogène et la texture uniforme, sont plus fortes que celles dont le grain est mélangé, quoique ces dernières soient quelquefois plus dures et plus pesantes.

4° Les qualités des pierres influent aussi sur la manière dont elles s'écrasent : celles qui ont le grain fin, la texture homogène et compacte, et qui

rendent un son clair lorsqu'on les frappe, se divisent en lames ou en aiguilles; les plus fières se brisent tout-à-coup et avec bruit, et se réduisent en poudre.

5° Les pierres dont le grain est moins fin, qui ont leur texture moins compacte, et qui ne résonnent que peu ou point, se décomposent en pyramides, ayant pour bases les surfaces du solide, de manière que les pointes se réunissent au centre; ou la pierre se réduit en poussière; les deux pyramides opposées, ayant pour bases le dessus et le dessous du solide, chassent celles du tour; ces dernières se divisent par fentes verticales.

6° Toutes les espèces de pierres éprouvées ont diminué sensiblement de hauteur avant de s'écarter et même de se fendre. Cette diminution a été plus considérable dans les pierres qui se décomposent en pyramides.

7° Lorsque les pierres avaient en hauteur plus de deux fois la largeur de leur base, les parties comprises entre les pyramides formées, se fendaient verticalement, en se divisant en lames ou en aiguilles.

8° On a éprouvé encore qu'il faut moins de force pour faire fendre les pierres vives que pour les écraser, tandis que les pierres molles s'écrasent plutôt qu'elles ne se fendent.

9° L'indication la plus importante est celle qui fait apercevoir que la force des pierres de même genre est à peu près comme le cube de leur pesanteur spécifique.

NOMS DES PIERRES.	POIDS D'UN MÈTRE CUBE EN KILOGRAMMES.	POIDS POUR ÉCRASER UN CUBE DE CINQ CENTIMÈTRES DE CÔTÉ.
Grès blancs.	2475	23086
Cliquard de Meudon. . . .	2439	11977
Liais de Bagnoux.	2439	11113
Blanc franc de Montrouge. .	2354	6462
Roche d'Arcueil.	2303	6334
Roche dure de Châtillon. .	2294	4347
Pierre de Saint-Cloud. . . .	2157	3339
Pierre de Saint-Leu.	1704	1382
Pierre ponce.	675	1053
Lave du Vésuve.	2642	16881
Porphyre.	2798	50021
Granite de Normandie. . . .	2662	17555
Marbre noir de Flandre. . .	2721	19719
Marbre blanc.	1694	8176
Gypse, ou pierre à plâtre. .	2300	•

(Voyez les *Traité sur la résistance des bois et des matériaux employés dans les constructions*, par MM. Girard, Navier, Tregold, etc.)

FIN.

C11023



ERRATA DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

ÉDITION 1828.

Page 23, ligne 18 : CA, lisez CA'.

Page 24, ligne 7 : du, lisez du.

Page 79, ligne 7 en montant : fig. 7, lisez fig. 6.

Page 98, ligne 6 : placera, ajoutez (art. 68).

Page 118, ligne 9 : latis, ajoutez de long pan.

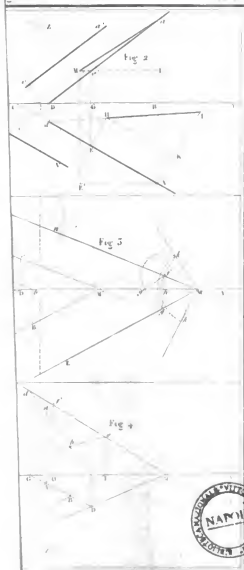
Page 121, ligne 14 : la droite Sq, lisez r_q.

Page 122, ligne 2 : et IK, lisez à IK.

Page 133, ligne 5 en montant : p^oectué, ajoutez rond.

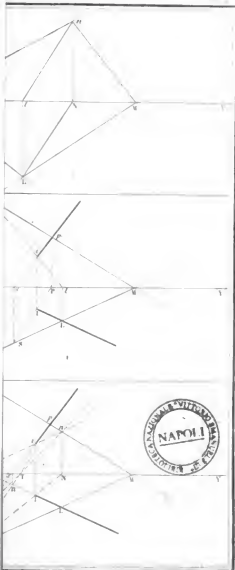
Page 145, ligne 16 : (C, CC), lisez (C, C').

Le descripteur pour 41 *Maquette*
générale droite et du Plan



L. Mouton

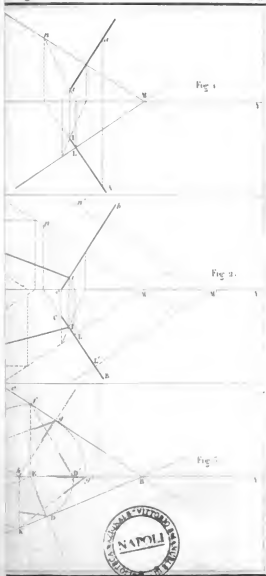
descripteur par. II Bachellet
 le droite et du Plan.





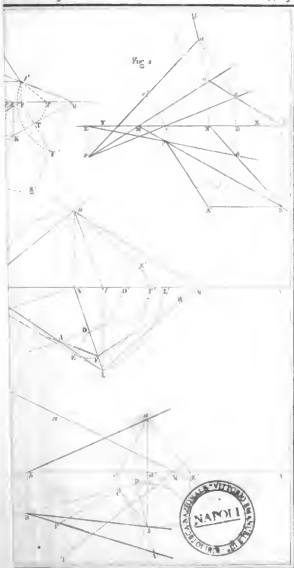
la ligne droite par M. Blachette
la ligne droite et du Plan

PL. 3

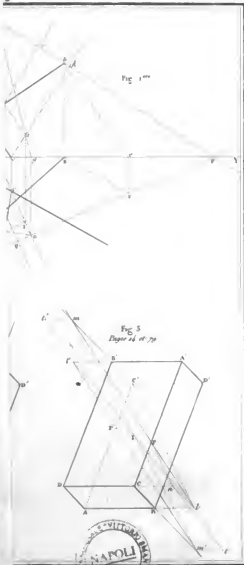


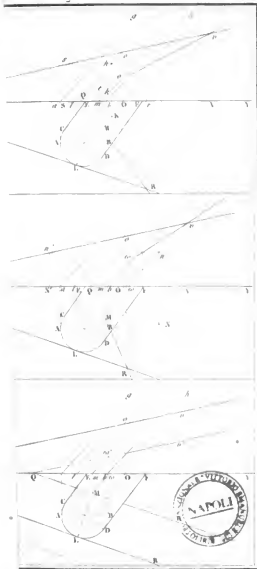
géométrie descriptive par M. Hachette
De la ligne droite et du plan

Pl. 2

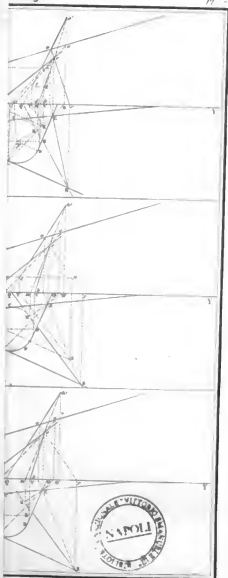


L. Simonet del.



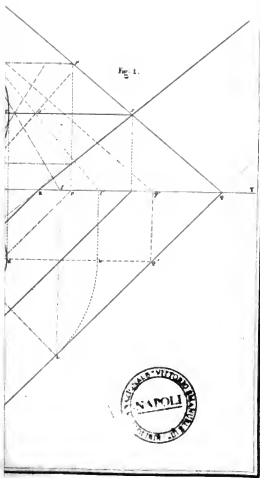


A. J. J. J. J. J.

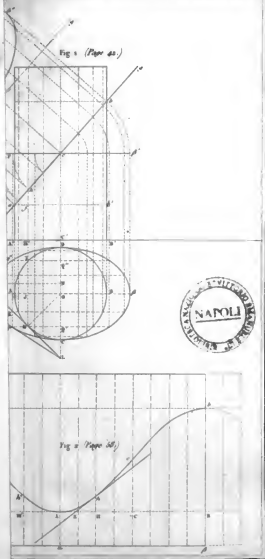


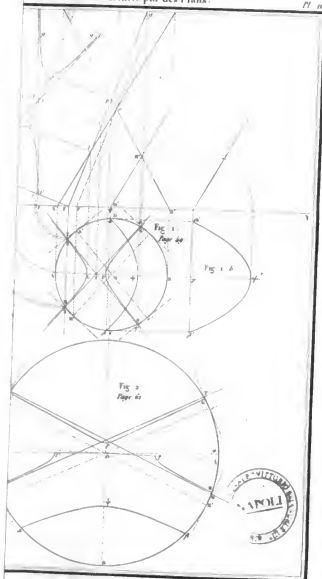
Descriptiv par. H. Hachette.
Plans Tangens.

Pl. 5



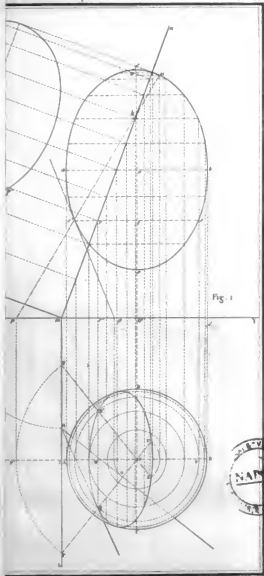
L. Hachette sc.



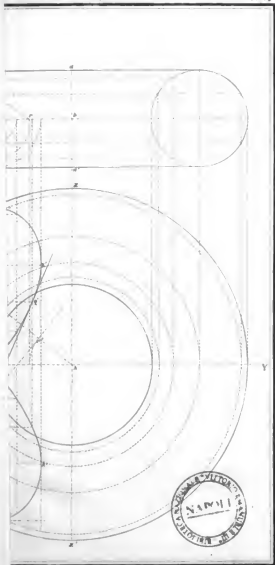


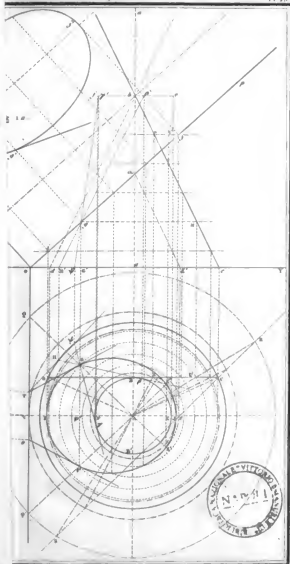
Géométrie Descriptive par M. M. Machette.
 Méthodes de Surfaces par des Plans.





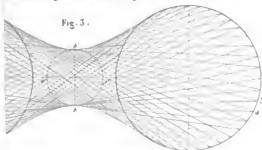
L. Deshayes del.





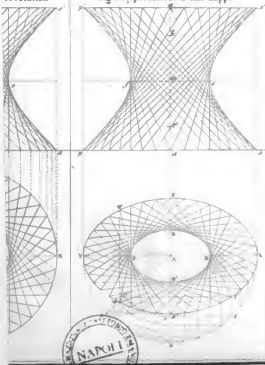
Surfaces réglées du second degré.

Fig. 3.

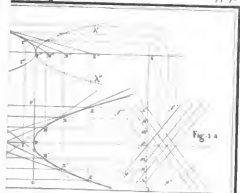


révolution.

Fig. 1. Hyperboloïde à une nappe.



Le Directeur des études.



Conoides.

Fig. 3

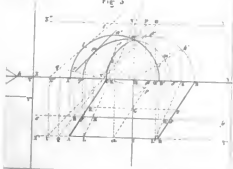
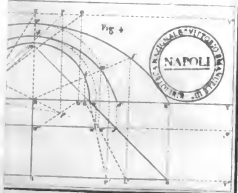
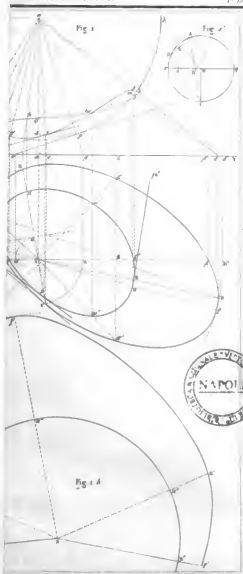
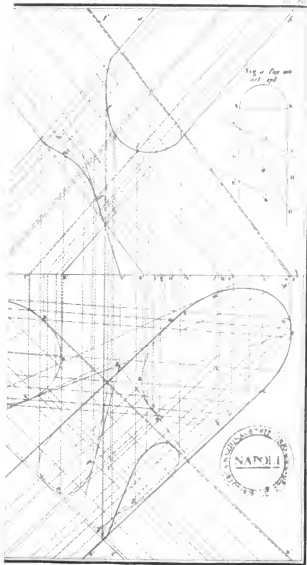


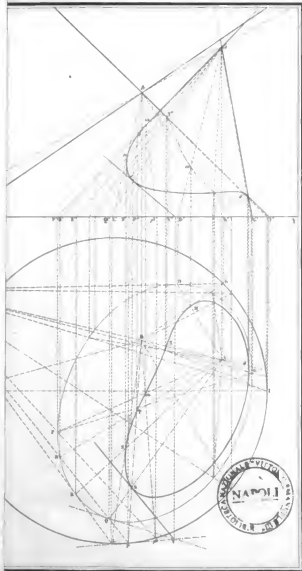
Fig. 4

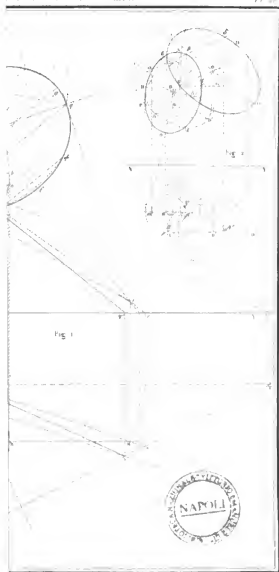


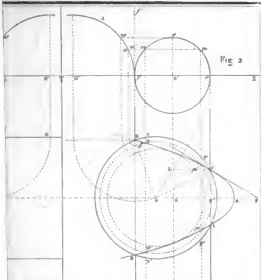


Géométrie Descriptive, par M. Hachette.
Intersections de Surfaces Courbes

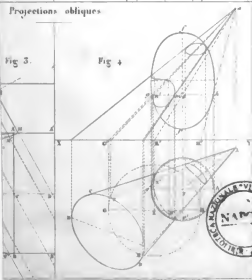


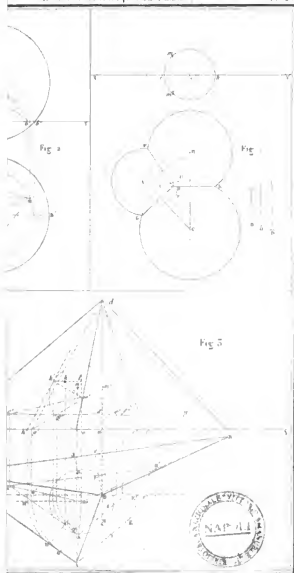


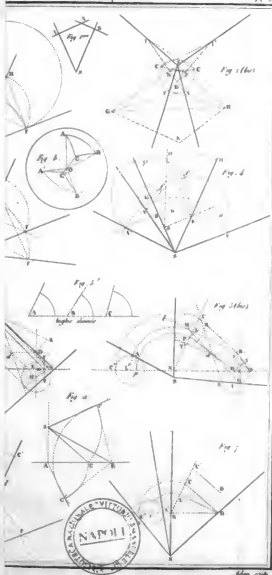


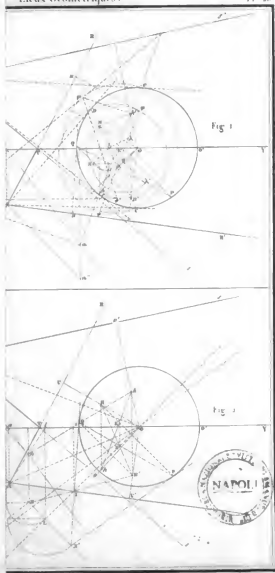


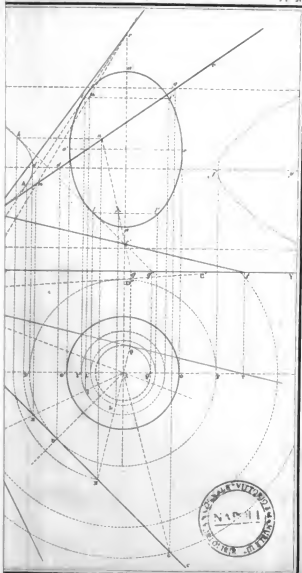
Projections obliques

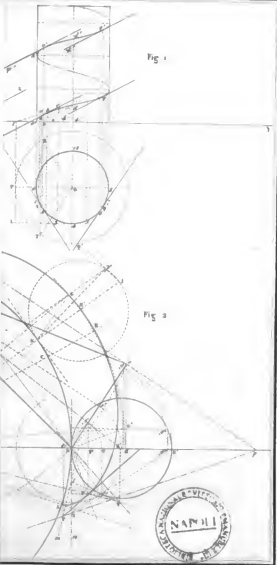








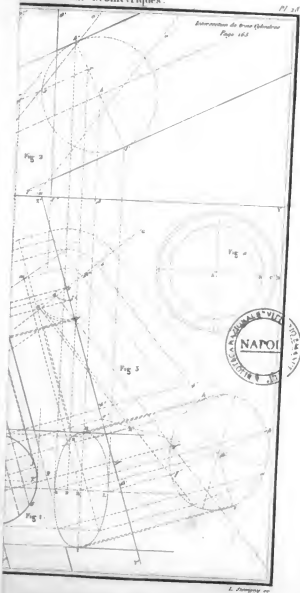




métrie Descriptive par. M. Hachette.
Lieux Géométriques.

Pl. 25

Intersection de deux cylindres
Page 163



L. Poncelet



Fig. A. Page 170

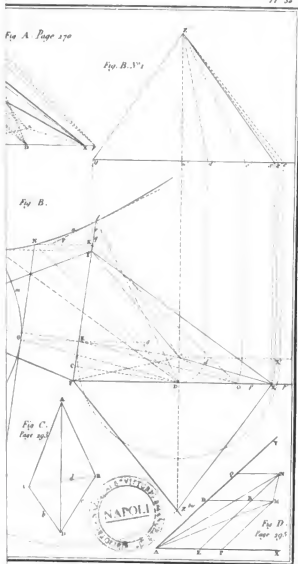
Fig. B. V^o 1

Fig. B.

*Fig. C.
Page 190*

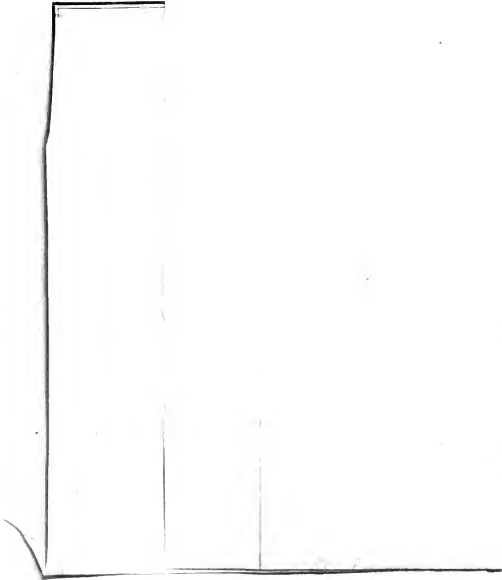


*Fig. D.
Page 205*

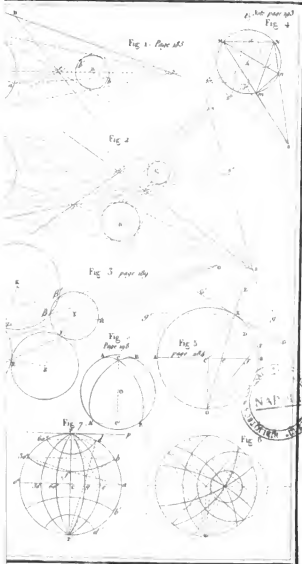


Cours

Liv. 2 Chap. 1^{re} des Applicat^{ns}



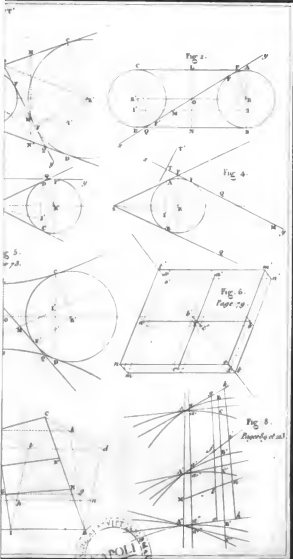




Géométrie Descriptive, par M. Hachette.

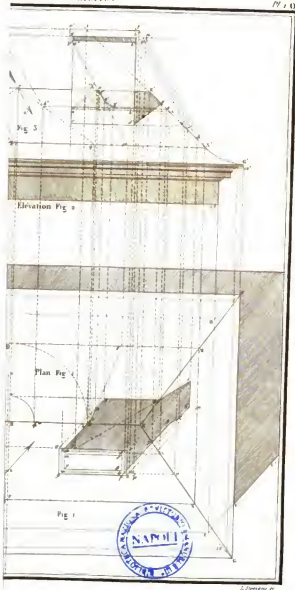
sur la Planché 31

Planché Supplémentaire A.

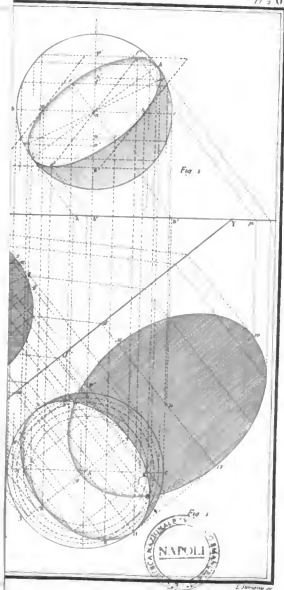


Durand sculpteur del.

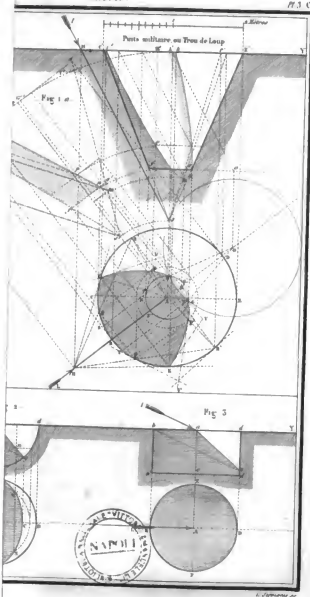




L. Dorey del.

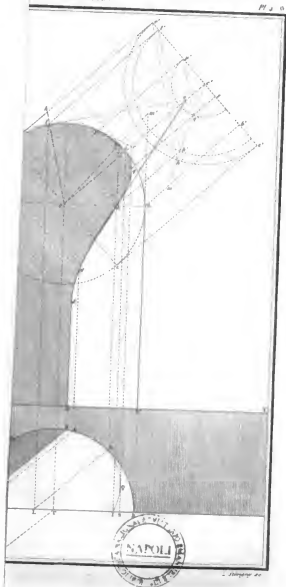


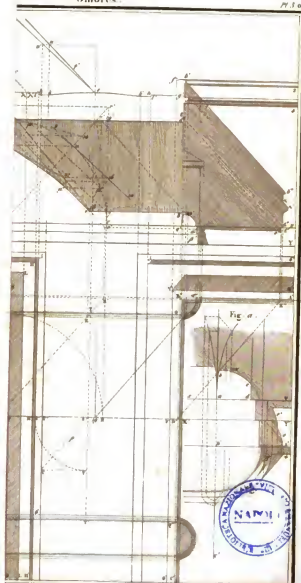
L. J. Hachette del.



Art descriptive, par H. Hachette.
Ombres.

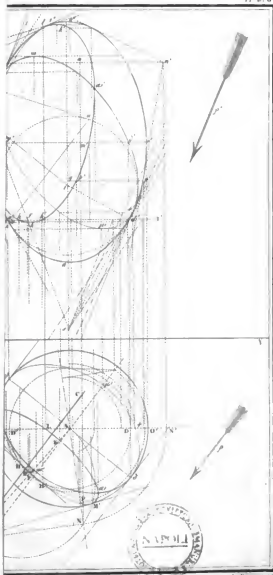
Pl. 2. 0





Leçons descriptives, par M. Hachette.
Ombres.

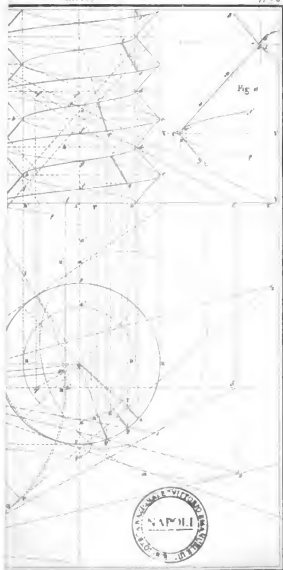
Pl. 6. 9



J. J. J. J. J.

metric Descriptive par. H. Hachette.
Ombres.

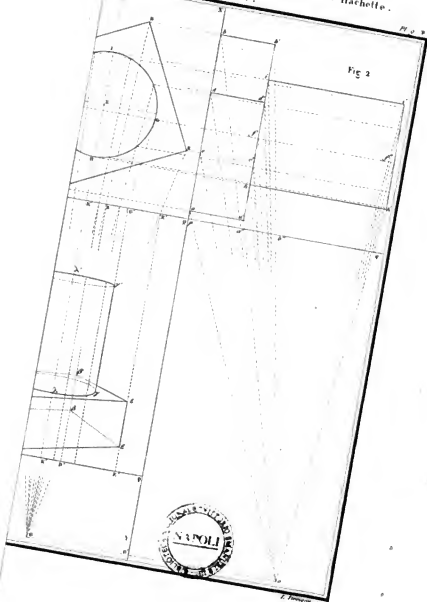
Pl. - 9



Copie la Planche 80 sur la Planche 20 P.

L. Deshayes sc.

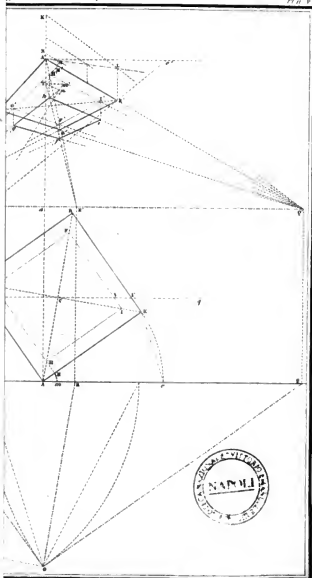
Fig 2



E. Tournier del.

Géométrie Descriptive par M. Hachette .
 Perspective .

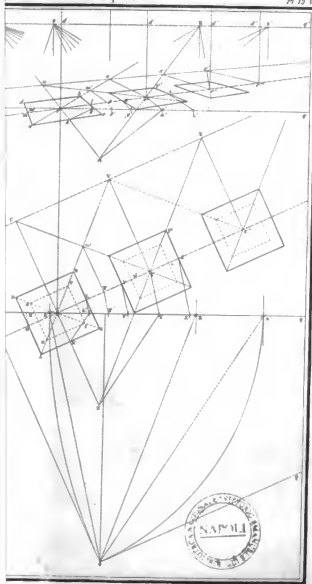
Pl. II. V.



L. Poncelet sc.

Géométrie Descriptive par M. Hachette.
 Perspective.

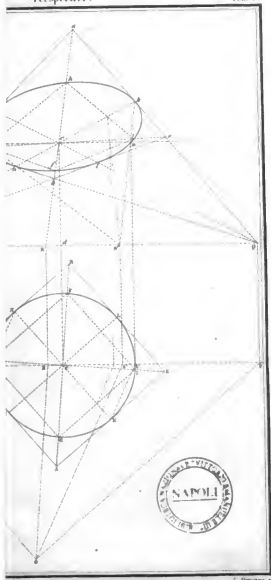
Pl. 12 P



L. Goussier del.

Descriptive, par M. Hachette
 Perspective.

Pl. 1. P.

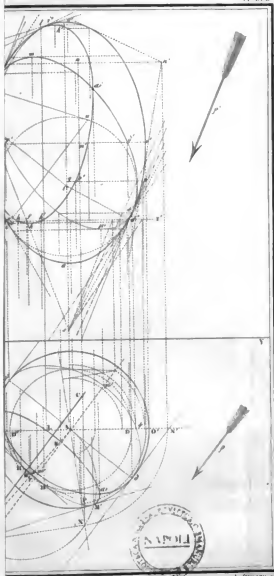


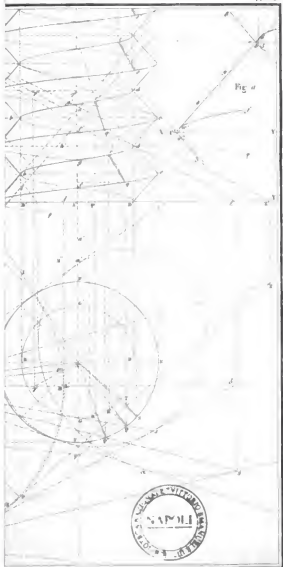
L. Hachette del.



Atlas Descriptif, par H. Hachette.
Ombres.

Pl. 6. 0





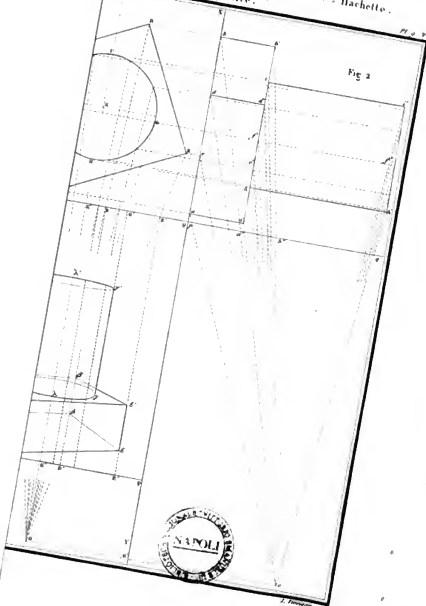
Secon la Planche 80 sur la Planche 80 P.

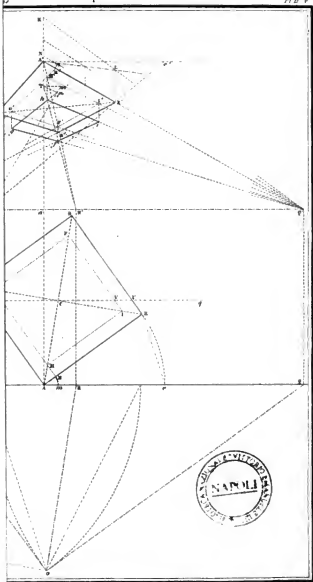
L. Deshayes sc

La Géométrie descriptive par. M. Hachette.
Perspective.

Pl. II

Fig. 2

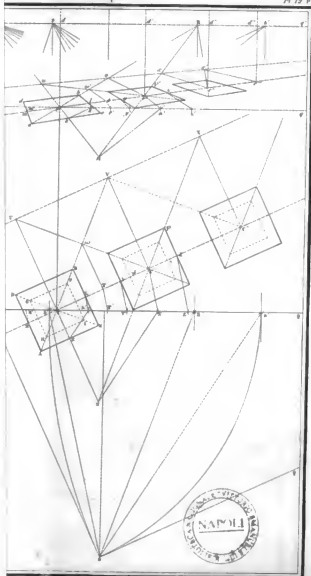




L. Bergey sc.

Géométrie Descriptive, par M. Hachette.
Perspective.

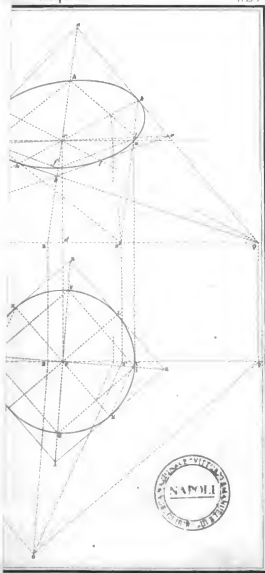
N 13 p



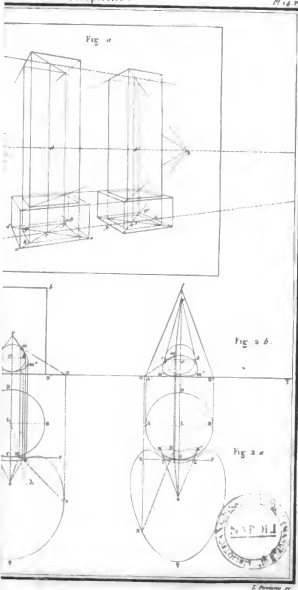
L. Stenogramma n.

Descriptive, par M. Hachette
Perspective.

Pl. 3. P.



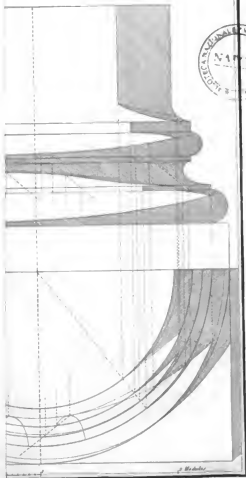
L. Deshayes del.



descriptive, par. M. Hachette.
Ombres.

Pl. 35. 0

Base Attique.



Description par M. Hachette.
Ombres.

Pl. 16 O.

Capiteau Dorique.

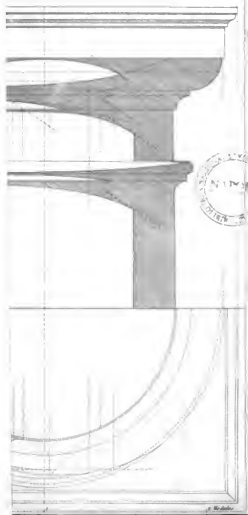


Planche 17 O. (Cadran)

L. Steupin sc.

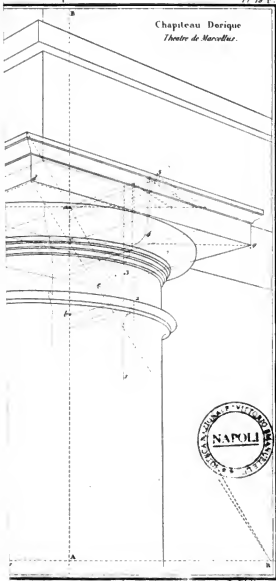
descriptives par H. Hachette.

Girard del.

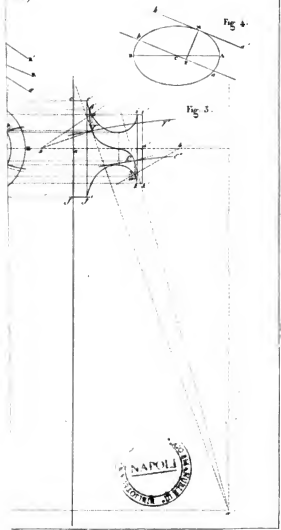
Arch. Descriptive, par. M. Machette.
 Perspective.

Pl. 18 P.

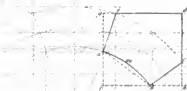
Chapiteau Dorique
 Theatre de Marcellus.



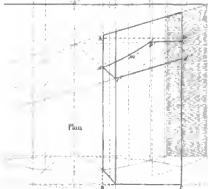
à l'élévation
(à l'ab.)



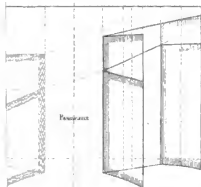
Profil



Plan



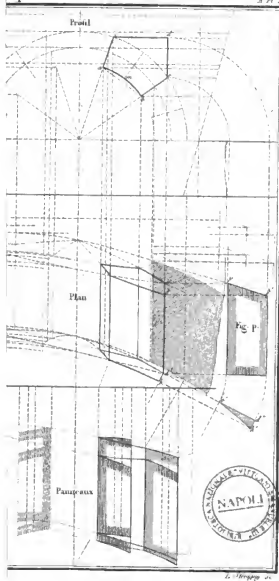
Perspective



L. Ponceau

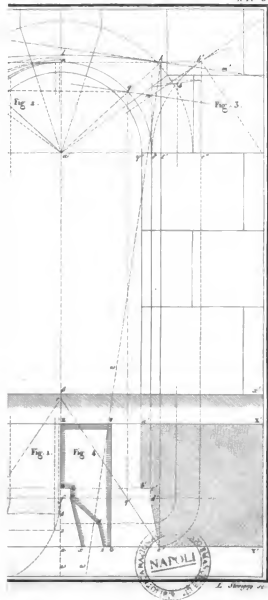
de l'Académie, par M. Hachette.
 Coupe des Pierres - Porte N° 2.

A. P. 1.



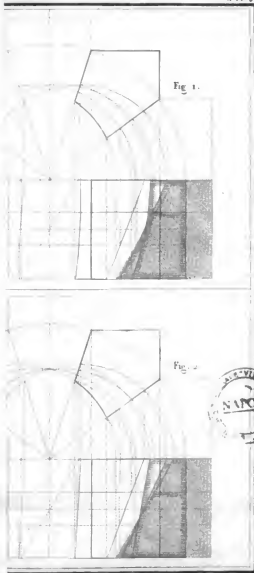
Géométrie, par M. Hachette.
des Pierres — Porte N° 3.

A PL 3



Perspective, par. M. Hachette.
 les Pierres - Porte N° 4

A PL 4

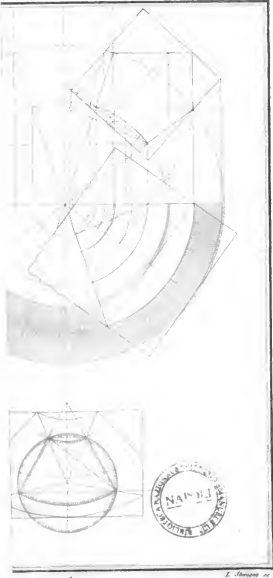


L. Hachette del.



Stéréotomie par M. Hachette,
des Pierres — Voûte N° 1.

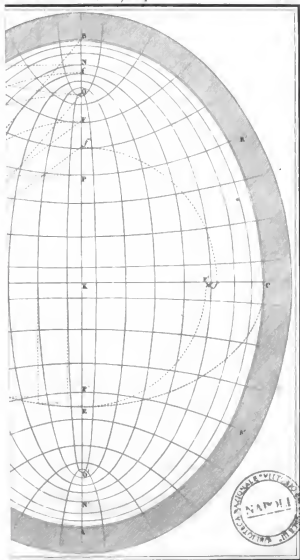
A PL. 5



L. J. J. J. J.

Mécanique par M. Hachette.
des Pierres-Voute (N° 2) Ellipsoïde

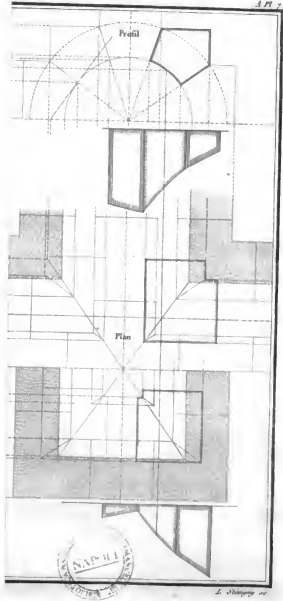
A Pl. 6



L. Hachette sc.

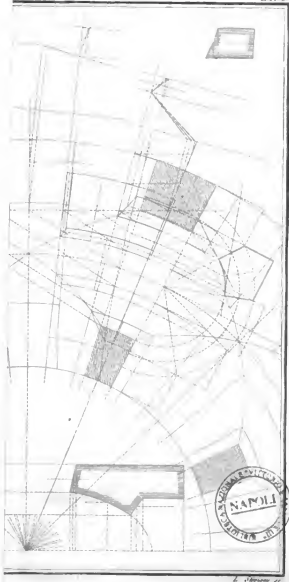
Stereotomie, par M. Hachette,
des Pierres — Voute N° 3.

A Pl. 7



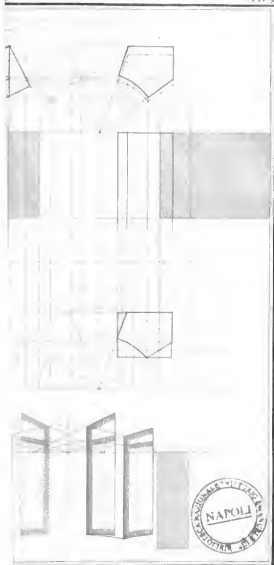
Stéréotomie, par M. Hachette,
Type des Pierres — Voute N. 4

A. P. 5.

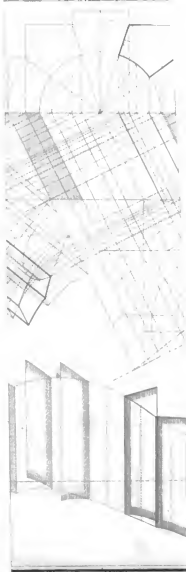


Stiracem. par. H. Hachette.
 ie des Pierres - Descente N° 1.

1 Pl. 2

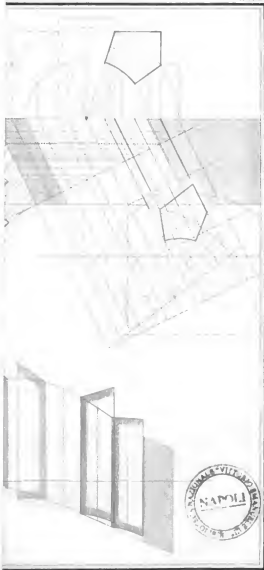


Siroteanu, par.
upe des Pierres - Descente N°



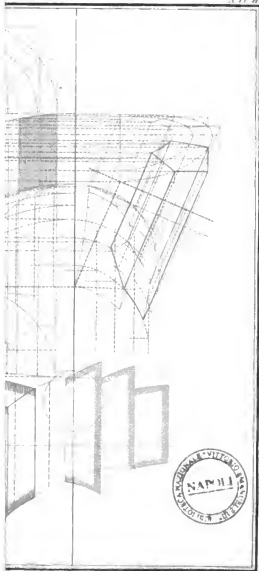
Violence, par M. Hachette.
des Pierres - Descente N° 2. 5r

A 17 1/2



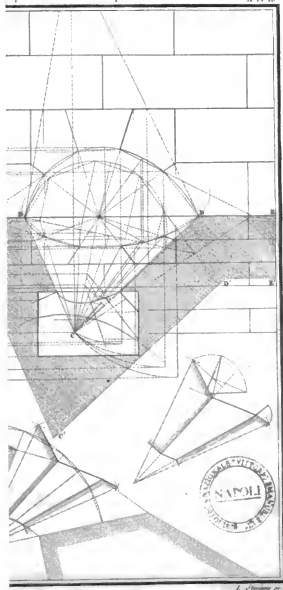
Exercice, par M. Hachette,
les Pierres — Descente N° 3.

A Pl. II



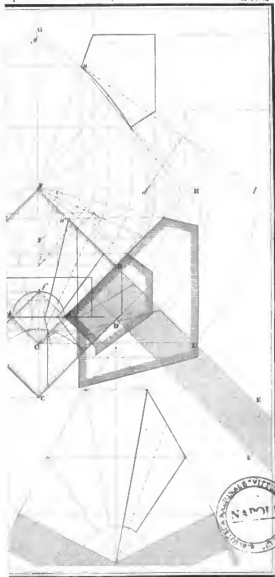
Leçons par M. Hachette.
 Suppe des Pierres - Trompe N°1.

A Pl 13



Stéréométrie par M. Hachette.
 Coupe des Pierres — tompe N° 2

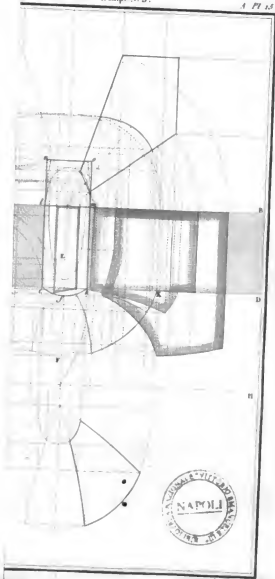
A Pl. 14



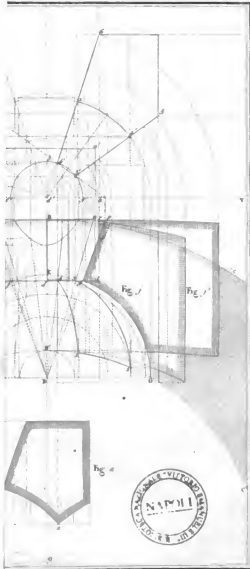
L. Hachette del.

Sticlémic. par. W. Hachette.
 pe des Pierres - Trompe N° 3.

A Pl 15

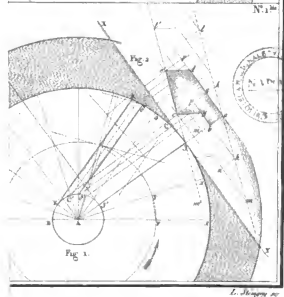
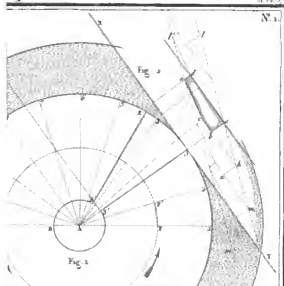


L. Hachette sc.



Stiriotomie, par M. Hachette
Coupes des Pierres — Escaliers N° 1, 1^{re} à Nyon plein.

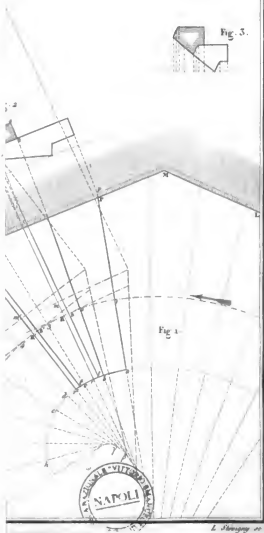
475-



Mémoire, par M. Hachette
de des Pierres - Facaher N° 2

A Pl. 10

Fig. 1.

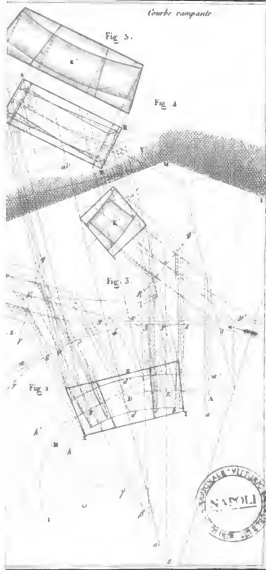


L. Béranger sc.

Perspective, par M. Hachette,
de des Pierres-Escalier N° 3.

A Pl. 32

Courbe rampante



Del. Hachette





